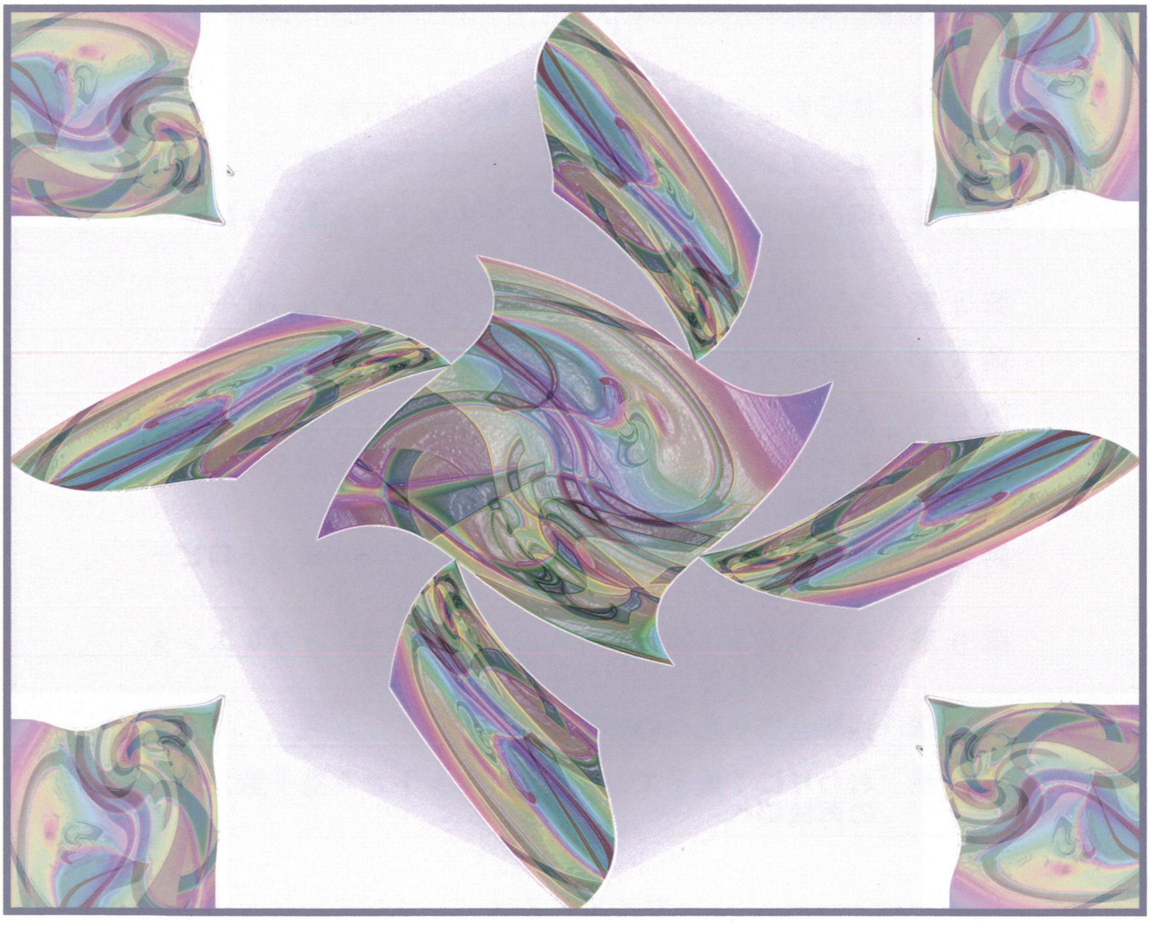
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2014年4月1日発行　第52巻4号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

4
2014

特集　物理現象における表現の多様さ
様々な視点がもたらす深い理解



No.610

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-104：for Senior & Graduate Courses）

弦理論と行列模型

弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方

土屋　麻人　著

本体 2238 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

弦理論は重力を含む統一理論の最有力候補であり，その非摂動論的定式化が望まれている．本書では弦理論の非摂動論的定式化の候補として研究が進められている「行列模型」と，それがもたらす興味深い知見の数々を紹介する．巻末に設けられた付録が理解を助ける．

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 610 April 2014

物理現象における表現の多様さ

様々な視点がもたらす深い理解

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間(本誌のみ) 11,000 円, 半年間(本誌のみ) 5,500 円. (税込み価格)

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい.

数理科学特集一覧

63 年/7～2010 年/12 省略
2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理
2013 年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯
/12 物理学における存在とは
2014 年/1 波と粒子
/2 利用する物理
/3 幾何学における様々な発想

数理科学臨時別冊一覧

12 年/11 幾何学の量子化
12 年/12 量子力学から超対称性へ
13 年/1 行列解析ノート
13 年/4 無限量子系の物理と数理
13 年/7 現代宇宙論講義
13 年/8 クォーク·ハドロン物理学入門
13 年/9 統計力学から理解する 超伝導理論
13 年/12 量子力学ノート
14 年/1 量子情報と時空の物理
14 年/2 弦理論と行列模型
14 年/3 ディラック方程式

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
三省堂本店(神田)
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂(高田馬場)
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
丸善日本橋店
MARUZEN 多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店(横浜)
有隣堂イセザキ町本店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN 広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学 (北１店)
九州大学 (理系)

April 2014 MATHEMATICAL SCIENCES Number 610

特集／物理現象における表現の多様さ

巻頭言

和田 純夫

物理学という学問を深めていくと，一つの現象に対して複数の説明法があることがわかってくる．真理は一つだと考える原理主義者ならば，一方の説明は間違い（あるいは不十分）であり，他方の説明のほうが正しい（あるいは真理に近い）と考えるかもしれない．心の広い相対主義者ならば，物事には様々な見方があると，すべてを受け入れる気持ちになるかもしれない．物理好きならば，多くの説明を見て，単純に嬉しくなるかもしれない．ファインマンは，物理学者が一つのことに対して様々な理解を得ることの重要性を説き，複数の説明があること自体が自然界の本質なのではないかと述べている．

この特集では実際，同じ現象に対して複数の説明があるという事情が，物理のあらゆる分野で見られるという話をしていただく．順番に簡単に内容を紹介しておこう．

最初は古典力学である．大学初年度で学ぶ力学は，$ma = F$ という運動方程式を基本とするニュートン形式である（と言っても，微分方程式として運動方程式を書いたのはニュートンではないが）．それに対して，ラグランジェ形式とハミルトン形式というものもあるが，ラグランジェ形式は力学の背後に変分原理というものがあることの反映と言うべきだろうか．ハミルトン形式のほうは，二階微分方程式は一階連立微分方程式になるという数学の単純な原理の反映とも言えるが，そのようにして作られた理論には深い内容が含まれている．

電荷は電場から力を受けるというのは常識だが，ファラデーはこの現象を，電荷は電気力線によって引っ張られると解釈した（引張力）．また電気力線によって押される力もあるとした（側圧）．磁場による力も磁力線の引張力と側圧によって説明する．高校で磁気力をローレンツ力として学んだ人はとまどうだろう．両方の力があるのではなく，どちらの見方もあり，同じ結果を与えるということである．力学的な表現を使えば，状態の変化を運動方程式として見るか，エネルギーと運動量の流れとして見るかの違いであり，数学的には同等である．これも，背後にある変分原理の結果と言えそうである．

では変分原理はなぜ成立するのか．その理由は，古典力学の背後に量子力学があるからだという印象を私はもっている（「印象」などと曖昧な表現を使ったのは，法則に多様性がある理由の解釈にも多様性があるからである）．量子力学で変分原理の意味を理解するには，シュレーディンガー方程式ではなく経路積分という形式がわかりやすい．これらの差は数学的には微分形か積分形かの違いだが，式から見えてくる景色にはかなり違いがある．この特集では，普通の量子力学の問題を経路積分

ではどのように解くかという話もする．あまり知られていない話題にも触れる．

エントロピーとは何かという問題も面白い．まったく別の見方からの議論が，同じ量の存在にたどりつく．粒子一つずつを見ていて理解できる量ではなく，粒子を無数に含む系をどのようにとらえるかという，「実在」する量ではなく「見方」から生じる量であるという事情が，このような状況を生み出していると言っていいだろうか．様々な見方が可能だということは，その話に曖昧さを与えているとも言えるが，様々な見方によって同一の結果が得られるということは逆に，その話に重要性，信頼性を与えているとも言えそうである．

エントロピーの話にも登場するが，物理にはマクロな見方とミクロな見方がある．この特集では，超伝導における磁束の量子化という問題で両方の見方が紹介される．マクロな見方のほうが議論は簡単に見えるが，重要な仮定が含まれている．その意味ではマクロな見方は不完全ということになるのだろうが，簡単な仮定から結論が出るのだとしたら，本質はそこにあったと察することができる．計算で答えが得られても理解したとは言えない．何が本質なのかがわかって初めて，問題を理解したと言えるのだということを強調する人は多い．

一般相対論とは，重力を幾何学的にとらえた理論であると言われ，実際，授業ではそのように習うだろう．しかし幾何学を離れて純粋に力学的（場の理論的）に見られるということがファインマンやワインバーグらによって明らかにされた．これは，幾何学的見方をまず知っていなければ到底，思いつけなかったであろう話だが，結果として，幾何学がなくても相対論は解釈できることがわかる．米谷氏によって明らかにされた弦理論と一般相対論の関係も，そのような見方がなければ出てこない話だった．幾何学的に解釈できたということのほうが特殊事情によるものだったのかもしれない．

電気と磁気の性質は似ている．少なくとも真空中の電磁場に対しては電場と磁場を入れ換えても理論は何も変わらない（電磁双対性という）．電荷が存在する場合にどうなるか，明らかになっていないが，少なくとも超対称性という性質をもつ修正した理論では，互いに電磁双対の関係にある理論の対の存在が示されている．しかもその場合，一方の理論で相互作用が弱いケースが，他方の理論の相互作用の強いケースに対応する．弱結合と強結合の双対性と言われ，理論を解く上でも有用なことだが，この双対性は，背後にある，さらに「深遠」な理論に対する二つの見方の現れだとも解釈でき，統一理論の探求の上でも極めて興味深い．

空間の次元が違う二つの理論が実は同等なことがあるという驚くべき原理（ホログラフィック原理）が関心を集めている．この原理は最初はブラックホールの温度の話から，憶測として出てきたものだが，1997 年にマルダセナがその具体例を指摘し，活発な研究が始まった．マルダセナがあげた例は 5 次元のある種の重力理論と 4 次元のある種のゲージ理論の対であったが（ここでも二つの理論の強結合と弱結合が対応する），他の例も指摘されている．この原理を素粒子や物性の計算に役立てたり，ブラックホールに適用するといった研究も活発だが，そもそもなぜこの原理が成り立つのか，その本質自体がまだ明らかになっていない，不思議で難しい話である．

物理学の理論の多様性を幾つか紹介したが，他にも多くの例があるだろう．しかしここであげた諸例だけからもわかるように，多様性ということの意味も多様である．まず，数式の変形によって同等であることが証明できる場合がある．また，出発点が違うのに結果を見たら同じだったという場合もある．その原因は，背景に，より深い理論があり，それを別の側面から見たからなのかもしれない．自然界の真理自体の追求と，それをいかに表現するかという活動は，特に意識されない場合でも切り離せない，学問の両輪のようである．

（わだ・すみお，東京大学大学院総合文化研究科）

ニュートン力学と解析力学



加藤　光裕

1. はじめに

大多数の理系の学生にとって，大学に入って初めに習う物理学の体系は，ニュートン力学であろう．少ない基本法則から多様な自然現象を数式を用いて説明していく体系は，物理学の典型的な考え方を学ぶ恰好のお手本である．例えば，力 $\boldsymbol{F}$ が作用する質量 m の質点の運動は，その位置座標 (x, y, z) あるいは，これを成分に持つ位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が，時間 t とともにどのように変化するかを記述する**ニュートンの運動方程式**

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

（$\boldsymbol{r}$ の上のドットは，その数だけ時間 t に関する微分を施すことを表す）によって決定でき，ある時刻（$t = 0$ としよう）における位置 $\boldsymbol{r}(0)$ と速度 $\dot{\boldsymbol{r}}(0)$ が与えられれば，これを初期条件として (1) 式を，関数 $\boldsymbol{r}(t)$ に対する微分方程式として解くことにより運動がわかる．力学をこのような形で記述する体系を**ニュートン形式**と呼ぶ．

実は力学には，他の記述の仕方もある．**ラグランジュ形式**と**ハミルトン形式**である．これらの形式で記述する力学の体系を**解析力学**と呼んでいる．どうして同じ法則体系を記述するのにいろいろな形式があるのだろうか．ニュートン形式よりもラグランジュ形式のほうが，より一般性をもった記述ができ，力学変数の取り方もより自由になる．ラグランジュ形式よりもハミルトン形式のほうが，さらに力学変数の取り方の自由度が高くなり，数学的構造もより一般的になる．このように，新しい形式を取り入れることで，適用範囲や記述の仕方の自由度が増えていくのである．

新しい形式のメリットは，それだけではない．ミクロの世界を記述するために，ニュートン力学から大きな飛躍をして**量子力学**という新しい法則を人類は手にしたが，量子力学の基本方程式である**シュレディンガー方程式**は，ニュートンの運動方程式とは全く違う形をしている．どのようにしてシュレディンガー方程式に辿り着いたのか想像もできないほど，似ても似つかない形である．しかし実際には，後述するように，シュレディンガーはハミルトン形式の力学における**ハミルトン・ヤコビ方程式**を知っていて，これを手がかりにしたのである．このように違った形で，法則体系を記述しておくと，新しい法則を発見するための重要な手がかりを与えてくれることもあるのである．

以下では，力学におけるそれぞれの形式を簡単に紹介し，その特徴を見ていこう．

2. ニュートン形式

まずは，おなじみのニュートン形式の要点を押さえておこう．ニュートン形式では，質点の位置を直交座標（デカルト座標）(x, y, z) を用いて表す．そして，ここが重要な点であるが，**慣性系**というニュートンの第 1 法則が成り立つ座標系にお

いて，運動を記述する微分方程式 (1) が与えられる（ニュートンの第 2 法則）．すなわち，慣性系以外の座標系を用いたい，あるいは用いる必要がある場合では，(1) を基準にしてあらわに座標変換を施すことで必要な方程式を得なければならない．例えば慣性系に対して一定の角速度で回転している座標系（回転座標系）での運動方程式は，(1) 式の形ではなく，見かけの力である遠心力とコリオリ力の項が加わる．

他の形式との比較のため，実際の例を一つ見ておこう．簡単のため，質点が 1 次元の直線上を，フックの力と呼ばれる変位に比例して平衡点へ引き戻そうとする復元力が働く場合を考える（調和振動子）．運動は 1 次元に限られているので，座標 x のみを用いると，運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx \tag{2}$$

と表される．(2) 式の右辺が変位 x に比例するフックの力 $F = -kx$ であり，比例係数 k はバネ定数と呼ばれる．この力は，いわゆる**保存力**であり，**力学的エネルギー**を保存する．つまり運動エネルギー $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ とポテンシャルエネルギー $U = \frac{1}{2}kx^2$ の和 $E = T + U$ が時間によらず一定値をとる．そして，力 F とポテンシャルエネルギー U の間には，$F = -\frac{dU}{dx}$ の関係があることに注意しよう．

ここで，大胆な変数変換 $u = x^2$ を行ってみよう．変数 u に対する運動方程式は，当然ながら (2) において x を u に置き換えた $m\ddot{u} = -ku$ ではない．u に対する方程式は，まず (2) 式を用意した上で，まじめに変数変換して書き換えていかなければならない．(2) 式の両辺に $2x$ をかけておいてから書き換えると，

$$m\left(\ddot{u} - \frac{\dot{u}^2}{2u}\right) = -2ku \tag{3}$$

が得られる．この式は，通常の座標 x に対する方程式 (2) を知らずして直接書き下すことは難しい．

■ 3. ラグランジュ形式 ■

より一般的な座標で自由に運動方程式を扱うためには，ラグランジュ形式に移行することが便利である．以下，話を簡単にするために，（1 次元調和振動子のように）1 自由度の場合に話を限って説明する．ラグランジュ形式において基本となる量は，**ラグランジュ関数**（**ラグランジアン**）である．これは，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差 $L = T - U$ として定義される．ただし，L を座標と速度の関数として扱う．座標といっても長さの次元を持っている必要はなく，角度などでもかまわない．より一般的な座標ということで，**一般化座標**と呼ぶ（それを例えば q と書こう）．そして，その時間微分 $\dot{q}$ を，**一般化速度**と呼ぶ．一般化座標が角度ならば，それに対する一般化速度は角速度に対応する．すると，ラグランジュ形式における運動方程式は，次の**オイラー・ラグランジュ方程式**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{4}$$

で与えられる．

先ほどの調和振動子の例では，$q = x$ として

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{5}$$

がラグランジアンであり，これに対するオイラー・ラグランジュ方程式 (4) は，(2) に他ならないことは，計算すれば直ちに確かめられる．

重要な点は，方程式 (4) がどのような変数に対しても常に同じ形で成立することである．例えば，前節の最後に行った新しい変数 u に対しても同様である．実際，ラグランジアンにおいて変数変換を行うと

$$L(u, \dot{u}) = \frac{m}{8}\frac{\dot{u}^2}{u} - \frac{k}{2}u \tag{6}$$

となり，これに対応する方程式 (4) で，$q = u$ とすれば，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{4}\frac{\dot{u}}{u}\right) = \frac{m}{4}\left(\frac{\ddot{u}}{u} - \frac{\dot{u}^2}{u^2}\right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{m}{8}\frac{\dot{u}^2}{u^2} - \frac{k}{2} \tag{8}$$

であることから，(3) と等価な式が得られることは

すぐに確かめられる．

このように，ラグランジュ形式は変数の取り方の自由度が高く，極めて強力である．ラグランジュ形式はまた，保存則に関して見通しがよい．例えば，ラグランジアン $L(q,\dot{q})$ が，実際には座標 q に依存していない場合を考えると $\frac{\partial L}{\partial q}=0$ なので，(4) より，$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})=0$ が得られる．すなわち，$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ なる量は時間的に一定である．このとき，q を**サイクリック座標**と呼ぶ．例えば，(5) で力が働かない場合つまり $k=0$ を考えれば，L は x に依存しないので，このとき x はサイクリック座標となる．そしてこの場合の保存量は，$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2)=m\dot{x}$ であり，x 方向の運動量に他ならない．力が働かないときには運動量が保存し，慣性運動を続けることが導かれるのである．

ところで，オイラー・ラグランジュ方程式は，次のような考え方からも導かれる．すなわち，ラグランジアンの時間に関する積分

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q})dt \tag{9}$$

を考える．この S を**作用**と呼ぶが，これは関数 $q(t)$ ごとに値が決まる．そこで，始めと終わりの時刻における関数値 $q(t_0)$, $q(t_1)$ を固定して，可能な関数のうち，S を停留させる関数 $q(t)$（つまり関数をある $q(t)$ から微小に変化させても S が変化しないような関数 $q(t)$）が，実際の運動を表す $q(t)$ であると考える．これを**ハミルトンの原理**と呼ぶ．これによって選び出される関数は，オイラー・ラグランジュ方程式をみたすことが証明できるので，ハミルトンの原理とオイラー・ラグランジュ方程式は等価である．微分方程式に基づくと，初期条件が与えられて，次の時刻の関数値 $q(t)$ が次々といわば局所的に決まっていくのであるが，この原理では，始めと終わりの関数値が与えられて，関数全体がいわば大域的に決まる．互いに相補的な表現になっており，これも表現の多様さの一例である．

4. ハミルトン形式

ニュートンの運動方程式もオイラー・ラグランジュ方程式も，現れる変数の時間微分の階数は高々2階であった．つまり時間に関して2階の微分方程式である．これに対してハミルトン形式における運動方程式（**ハミルトン方程式**あるいは**正準運動方程式**）は，時間に関して1階の微分方程式である．その代わり，変数が2倍になっている．**正準座標**（q と書こう）および**正準運動量**（p と書こう）の組に対する1階の連立微分方程式になっている．

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \tag{10}$$

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{11}$$

ここで，$H=H(q,p)$ は，ハミルトン関数（ハミルトニアン）と呼ばれ，ハミルトン形式において基本的な量である．ハミルトニアンとラグランジアンは，ルジャンドル変換と呼ばれる関係で結びついている．すなわち，ラグランジアン $L(q,\dot{q})$ で記述される系があれば，これからまず一般化座標 q を正準座標とみなし，さらに $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ で定義される量を正準運動量として，$H(q,p)=\dot{q}p-L(q,\dot{q})$ という形でハミルトニアンが定義される．ここで，この式の右辺の $\dot{q}$ は，p の定義式を逆解きして q と p で表しておくことで，最終的に q と p の関数として $H(q,p)$ が定義されることに注意しよう．

再び，前述の調和振動子の例を考えると $q=x$ として，(5) の $L(x,\dot{x})$ を用いれば，$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$ であるから，ハミルトニアンは，

$$H(x,p)=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kx^2 \tag{12}$$

となる．これは，ちょうど運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和になっている．多くの場合には，この例のようにちょうど $H=T+U$ となる．さて，このハミルトニアンを用いてハミルトン方程式 (10), (11) を書き下せば，

$$\dot{x}=\frac{p}{m}, \tag{13}$$

$$\dot{p}=-kx \tag{14}$$

となり，この連立方程式が (2) と等価であることがわかる．

一方，変数として $u = x^2$ をとり，(6) の $L(u, \dot{u})$ を用いるならば，正準運動量が $p_u \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{m\dot{u}}{4u}$ となり，対応するハミルトニアンは，

$$H(u, p_u) = \frac{2}{m} u p_u^2 + \frac{k}{2} u \tag{15}$$

となるが，これから得られるハミルトン方程式

$$\dot{u} = \frac{4}{m} u p_u, \tag{16}$$

$$\dot{p}_u = -\frac{2}{m} p_u^2 - \frac{k}{2} \tag{17}$$

は，やはり (3) と等価になる．このように，ラグランジュ形式におけるオイラー・ラグランジュ方程式と同様に，ハミルトン方程式はどのような正準変数（正準座標と正準運動量）の組に対しても常に (10), (11) の形で成立するのである．

正準変数の取り替え（変数変換）は，ラグランジュ形式の一般化座標の取り替えよりもさらに広い自由度が許され，例えば正準座標と正準運動量の役割を入れ替えてしまうようなものまで含まれる．一般に，ある正準変数の組から別の正準変数の組への変数変換を，**正準変換**と呼ぶ．例えば，調和振動子の場合でも，

$$x = \sqrt{\frac{2P}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} Q\right), \tag{18}$$

$$p = \sqrt{2mP} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} Q\right) \tag{19}$$

なる変換によって Q,P という変数へ移す変換は正準変換であり，新しい変数でのハミルトニアンは，$H(Q, P) = P$ である．何とハミルトニアン自身を正準運動量に一致させてしまう正準変換なのである．もちろんこの場合のハミルトン方程式は簡単に解けて，それを上記に代入すればおなじみの単振動の解が得られることは言うまでもない（読者自ら確かめよ）．

ところで，正準変換には**母関数**と呼ばれる便利な関数が付随している．例えば，正準変数 (q, p) から新しい正準変数 (Q, P) への変換には，元の変数のどちらかと新しい変数のどちらかに依存する関数（時間 t に陽に依存してもよい）F が付随している．例えば旧変数から q を，新変数から Q を選んだとすると $F(q, Q, t)$ が存在して，

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \tag{20}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \tag{21}$$

と書ける．例えば，先ほどの例 (18), (19) の場合，$F(x, Q) = \frac{\sqrt{mk}}{2} x^2 \cot(\sqrt{\frac{k}{m}} Q)$ が正準変換の母関数である．一般に正準変換の母関数 F が与えられたとき，新変数に対するハミルトニアンを $K(Q, P)$ とすると，元の変数に対するハミルトニアン $H(q, p)$ との関係は，

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{22}$$

である．つまり，母関数 F が時間 t に陽に依っている場合には，単に H に代入しただけではなく，付加項がつくことに注意しなければならない．

■ 5. 量子力学への橋渡し ■

前節の正準変換を用いて重要な方程式を導こう．ただし今回は母関数の変数として旧変数から q を，新変数から P をとっておく．すると，今度は

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \tag{23}$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} \tag{24}$$

によって，変数の関係が決まる．さて，新しいハミルトニアン K ができるだけ簡単な形になるものを考えたいのであるが，一番大胆な選択は，$K = 0$ となるようなものであろう．この場合ハミルトン方程式の解は，明らかに Q,P ともに定数である．変換の母関数 $F(q, P, t)$ にこの解を代入すれば，q と t のみの関数とみなせるので，それを $S(q, t)$ と書こう．すると S がみたすべき方程式は，$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ より

$$H(q, p, t) + \frac{\partial S(q, t)}{\partial t} = 0. \tag{25}$$

さらに S は母関数であり $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ となるので，こ

れを代入すれば，

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{26}$$

という S がみたすべき方程式が得られる．これが，ハミルトン・ヤコビ方程式であり，S はハミルトンの主関数と呼ばれる．

これは，純粋に古典力学の方程式であるが，実は量子力学にとても近づいていることが，$\psi = \exp(iS/\hbar)$ とおいて ψ の方程式に書き直してみるとわかる（$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの）．簡単のため，q を x と書き，ポテンシャル $V(x)$ 中の粒子のハミルトニアン $H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$ に対して書き直しを実行してみると，

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + V(x)\psi \tag{27}$$

となる．量子力学の初歩をかじったことのある読者には，これとよく似た方程式に見覚えがないだろうか．そう，シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \tag{28}$$

と実によく似ている．シュレディンガーは，(27) 式の ψ が，ドブロイの物質波を表すべき波動関数としてのいくつかの性質を持つことに気づいていた．例えば，運動量 p とエネルギー E をもつ粒子に対して，$p = \hbar k$, $E = \hbar\omega$ によって対応する波数 k, 角振動数 ω の波 $\psi = \exp(ikx - i\omega t)$ は，方程式 (27) と (28) のどちらをもみたす．しかし (27) 式は非線形方程式であり，重ね合わせの原理が成り立たない．すなわち光の波の場合のような干渉効果が説明できない．シュレディンガーはここから飛躍をして，(27) 式と性質が似ていてしかも線形の方程式である (28) 式を正しい方程式であると看破した．こうしてシュレディンガー方程式は誕生したのである．

実際，完成した量子力学は，波動関数（状態ベクトル）の集合が作るヒルベルト空間とそれに作用する線形作用素としての物理量といった道具立てによって構成されるが，シュレディンガーが線形性の重要性を認識していたおかげで，(27) 式から (28) 式への飛躍を成し遂げることができたのである．また，この道筋からハミルトニアンや正準変数といった概念が，量子力学においても基本的概念となったこともうなずけるであろう．

6. おわりに

以上見てきたように，一つの力学の体系に様々な表現形式があり，それぞれに利点がある．特に，ニュートン形式からラグランジュ形式，そしてハミルトン形式へと進むにつれて，より高い一般性を獲得していく様子がわかる．

同じ力学の方程式といっても，ニュートンの運動方程式とハミルトン・ヤコビ方程式とでは，ずいぶん見かけが違っている．常微分方程式と偏微分方程式の違い以上に，どのような量を用いて表すかも違っている．しかしながら，ハミルトン・ヤコビ方程式の形にまで到達していたことにより，シュレディンガーをして，量子力学へと飛躍させることが可能になったのである．このように，より一般性をもつ形式へと広げておくことが，次なる発展へのステップになることが，往々にしてあることが重要な教訓である．

（かとう・みつひろ，東京大学大学院総合文化研究科）

ファラデーの力線とマクスウェル応力



岡部　洋一

1. ファラデーとマクスウェル

マクスウェル応力と関連する言葉としてファラデーの力線，力管という概念がある．電気力線や磁力線はその方向に引張力があり，それと垂直な方向に圧縮力を持つという概念である．ファラデーは 1831 年の電磁誘導の発見の前後ぐらいから磁力線という概念を持ち出したようで，電磁誘導は導体が磁力線を切ることで発生するなどと言っている[1)]．

マクスウェルは電磁誘導発見の年，1831 年に生まれているが，ファラデーの電磁気学における諸実験，諸論文に大きく影響を受け，1855 年に「ファラデー力線」を執筆し，ファラデーにも献本している[2)]．

このように，マクスウェル応力とファラデーの力線，力管は切っても切れない縁で結び付いているのである．なお，ファラデーは実験とそれに基づく直観からなる科学者であり，マクスウェルはそうした結果を矛盾なく，数学を駆使して理論的に裏付ける科学者であり，これら二人のよい組合せが中核となって，電磁気学の整備が急速になされたといっても過言ではなかろう．

2. 電気力線

空間に分布した**電荷**は，各電荷ごとに放射状の**電場**[*1)] $\boldsymbol{E}$ を生成する．こうした中に別の電荷（以下，**検電荷**という）を置くと，各電荷の作る電場をベクトル的に合成した電場ベクトルに検電荷の電気量を乗じた大きさの力を受ける．この際，合成された電場ベクトルを図示すると，空間の中で，その方向や大きさは徐々に変化しており，あたかも一つの流れのようなイメージを構成している．この流線を**電気力線**と呼ぶ．

電気力線は正電荷から発生し，負電荷で消え失せる．力線の発生が，各電荷の電気量に比例するものとし，かつ，点電荷はその周辺のあらゆる方向に均等[*2)]に力線を出すものとする．全空間の正負の電荷の総量が 0 でないときには，余った力線は無限遠へ発散，もしくは無限遠から収束してきて，辻褄が合うことになる．

図 1 のように，外部電場のある空間に検電荷を置いた場合，外部電場に検電荷の作る電場も重ねてみよう．検電荷がある程度の大きさを持つものとすると，検電荷は四方八方に均等な電場を形成するが，元々の外部電場の影響で，その周辺の力線には分布の偏りが生じる．検電荷の表面での力線密度を見ると，電場の下流側の密度が高くなり，上流側の密度が下がるのである．検電荷の受ける力は電場の方向であるので，あたかも力線に引っ張られるようなイメージが持てるのである．検電荷

*1)　理学系では電場と呼ぶが，工学系では電界という．本稿では電場とする．

*2)　電荷が小数値の場合とか，球の表面に等間隔で力線を置く具体的な方法があるかなど，作業しようとすると細かい困難が発生するが，概念的な描像を持ってほしい．

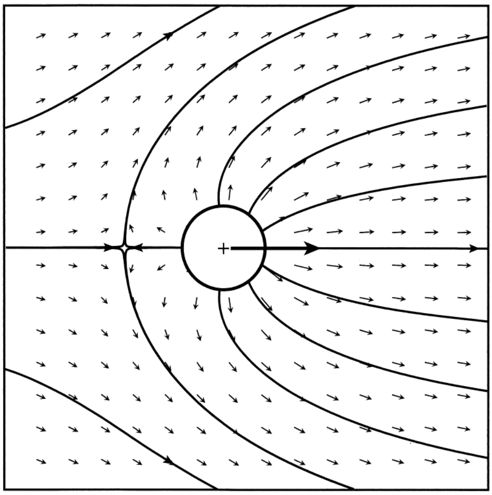


図 1　一様な電場中（右向き）に置かれた検電荷（正）は，電気力線の引張力により，総体として右向きの力を受ける．

の電気量が負の場合には，電場の上流方向の密度が高くなるため，やはり力線に引っ張られるようなイメージが持てる．これが，ファラデーの持った力線の概念であり，ファラデーは**力線**があると，力線はその方向に**引張力**を持っているとしたのである．

この引張力の大きさは導体表面に働く静電力から推定することができる．表面電荷密度を σ とすると，この表面の法線方向に $E = |\boldsymbol{E}|$ の大きさの電場が発生する．実はこの計算はやや乱暴である．というのは，電場の強さは表面では E であるが，内側で急速に減衰して 0 になるからである．厳密な計算をしてみると，表面付近の電荷は平均として $E/2$ の電場を感じることになる．ガウスの法則から，**電気定数**を ε_0 として $\sigma = \varepsilon_0 E$ であるので，結局，引張力の大きさは $\varepsilon_0 E^2/2$ となる．導体表面ではこの値になるが，ファラデーは真空内の任意の点で，力線はその方向に $\varepsilon_0 E^2/2$ なる引張力を持つと仮定したのである．E はその地点での電場の強さである．

一般的に，電荷にかかる力を計算するには，その電荷を取り去り，その地点の電場 $\boldsymbol{E}$ を計算してから，取り去った電荷の電気量 Q を掛けて $Q\boldsymbol{E}$ を計算する．それが検電荷という概念を導入した理由である．しかし，ファラデーの引張力による計算では，電荷にかかる力は，その電荷を置いたまま，周辺の電場を計算するだけで得ることができるという利点を持っている．ただし，点電荷の場合には，有限のサイズの電荷に対する作業をしてから，その形状を無限に小さくするという作業をしなければならない．

ファラデーは，力線はその垂直方向に**圧縮力**（以下，本稿では**側圧**と表現する）を持っており，その値も単位面積あたり $\varepsilon_0 E^2/2$ であるとも言っている．線が圧縮力を持つというのはわかりづらいので，何本かの力線を細く囲む管を想定し，その管状のものが，力線方向には縮もうとし，その垂直方向には拡がろうとするというイメージで表現した．この力線の集合である管状のものをファラデーの**力管**という．つまり，力管は長さ方向に縮もうとし，断面を拡げる方向に拡がろうとするというイメージである．こうしたファラデーの直観により導かれた力管の概念が，後にマクスウェルによって理論的に裏付けられるのである．

3. 磁力線と磁束線

さて，検電荷にかかる力から，力管が長さ方向に引張力を持ちそうなことはまだ何とか理解できるが，それと垂直な方向の力についてにまで，ファラデーがどうして直観を持てたのかは，あまりよくわからない．筆者の推定であるが，ファラデーはどちらかというと，磁場および電磁誘導に関する研究者であるため，磁力線から思い付いたのではないか．また，1820 年，エールステッドが電流が磁場を発生すること，また同年アンペールが電流間の力を定式化したことから，磁力線と磁石の関係のみならず，磁力線と電流の関係にも関心を持ったからではないか．そしてファラデーは，まず磁場に対し磁力線の有する力のことを推定し，それを電場に適用することにより電気力線を推定したのではないかと感じる．

当時，**磁石**から発生する磁場は，磁石には**磁荷**があり，それが電荷の作る電場のように**磁場** $\boldsymbol{H}$ を作ると考えられていた．したがって，磁荷と**磁力線**とには，電荷と電気力線とまったく同様な関係

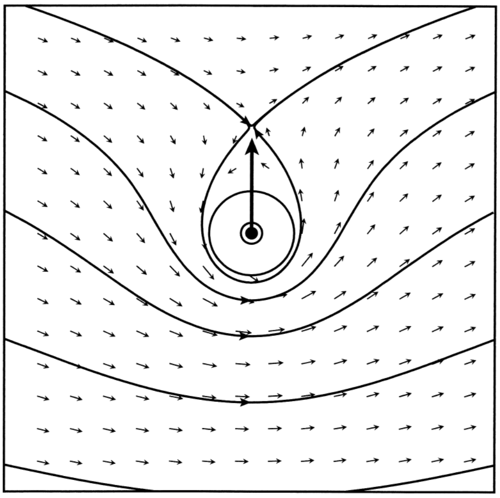


図 2　一様な磁場中（右向き）に置かれた検電流（手前向き）は，周辺の磁力線の側圧により総体として上向きの力を受ける．

が成立する．ファラデーは，この磁荷にかかる力も，磁力線の持つ**引張力** $\mu_0 H^2/2$ で説明したのである．μ_0 は**磁気定数**である．ところが，エールステッド，アンペールの発見により，電流も磁場を作り，また磁場から力を得ることがわかってしまったのである．**電流**の作る磁場は電流を回るように発生し，電流のある地点に始点や終点を持たない．したがって，磁力線の引張力だけではどうやっても，電流に力が働くことが説明できないのである．

ところで，一様な磁場中に検電流を置き，それの作る磁場を重ね，磁力線を描いてみると，図 2 のようになる．この図の場合，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ の式，もしくはフレミングの左手の法則より，電流は上向きの力を受けるはずである．これを磁力線を含む磁力管の膨らむ力によるとすると，同じ方向の力となるのである．つまり，ファラデーは，磁荷に対してはそこから磁力線が発生消滅するため，**力管**の長手方向の**引張力**による力が働き，電流に対しては，力管の断面方向の**側圧**による力が働くと考えたのではないかと私は推察している．しかも側圧を $\mu_0 H^2/2$ とすると電流に働く力が正しく得られるのである．

なお，現在は磁石も微小電流の集合ででき上がっているということがわかり，磁荷という概念は使われなくなっている．微小電流の集合は，磁石の最表面を流れる電流とほぼ等価であることが知られているので，磁石の磁極を除く側面の表面を環状に流れるソレノイド状の電流*3) に置き換えられる．電流が生成するのは**磁束密度** $\boldsymbol{B}$ であるが，真空中では磁束密度は磁場のちょうど μ_0 倍になるだけなので，**磁束線**の側圧は $B^2/(2\mu_0)$ であるということになる．

磁石を磁荷ではなく，表面電流で表現した場合の磁石に働く力の計算はちょっと面倒である．図は省くが*4)，まず，外部磁場のかかっていない場合の磁束線を見てみると，磁石の側面に内側と外側から圧縮力がかかる．内側のほうが磁束密度が高いため，合計すると，側面を膨らますような力である．一方，筒の磁極付近の端を見ると，磁束線はこの端付近で曲っており，その側圧で磁石を縮める方向の圧縮力を発生する．つまり，外部磁場がなくても，磁石は自身の発生する磁束により，側面には径を拡げる力，磁極付近には軸を縮める力を受けていることになる．これに外部磁場を加えると，N 極が外部磁場の下流にある場合，その極の端付近の磁場は多少緩むため，N 極付近の電流にかかる圧縮力は低下する．同様に，S 極が上流にある場合，やはりその付近の磁場は緩んで，S 極付近の電流にかかる圧縮力は低下する．つまり，外部磁場のないときに比べ，N 極は下流方向の，S 極は上流方向の差の力を感じることになる．これらの値と方向が，磁荷を仮定して計算した結果と一致するのである．

4. マクスウェル応力

ファラデーの力管の仮説は，その後，マクスウェルにより理論的に検証される．その誘導を示そう[3]．なお，真空中に電荷や電流があるだけで，誘電体や磁性体といった物質のない場合を考慮しよう．突然，式が出てきて難しくなるが，これらの式の誘

*3)　やや細かい議論となるが，ソレノイドの場合にはどこでも変わらない一定の面電流密度を持つが，磁石の場合には，外部磁束がかかった場合ですら，筒内の内部磁束が一定になるように電流分布のほうが変化する．

*4)　読者の課題としておこう．

導を細部にわたって理解せよと言っているのではない．学んでほしいのは，前提となる式と，結論の式である．

力の計算をするのであるが，点電荷や線状電流に働く力はローレンツ力の式から得られる．しかし，図 1 や図 2 に見られるように，電荷や電流が拡がって分布していないと，ファラデーの力管の力は計算できない．分布した電荷密度 ρ や電流密度 $\boldsymbol{J}$ に働くローレンツ力は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} &= \rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\\ &= \rho\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}. \quad (1)\end{aligned}$$

この右辺 ρ と $\boldsymbol{J}$ を，マクスウェル方程式の二つの式

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\boldsymbol{E} = \rho \quad (2)$$

および

$$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \quad (3)$$

を利用して，電磁場により書き換え，式変形を続けていく．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} &= \rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\\ &= \boldsymbol{E}(\varepsilon_0\operatorname{div}\boldsymbol{E})\\ &\quad -\boldsymbol{B}\times\left(\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\right)+\varepsilon_0\boldsymbol{B}\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\ &= \varepsilon_0\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{E}\\ &\quad +\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\operatorname{div}\boldsymbol{B}-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\\ &\quad +\varepsilon_0\boldsymbol{B}\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ &= \boldsymbol{i}\left\{\varepsilon_0\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(E_x^2-\frac{1}{2}E^2\right)\right.\right.\\ &\qquad\qquad \left.+\frac{\partial}{\partial y}(E_xE_y)+\frac{\partial}{\partial z}(E_xE_z)\right]\\ &\qquad +\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(B_x^2-\frac{1}{2}B^2\right)\right.\\ &\qquad\qquad \left.\left.+\frac{\partial}{\partial y}(B_xB_y)+\frac{\partial}{\partial z}(B_xB_z)\right]\right\}\\ &\quad +\boldsymbol{j}\{\cdots\}+\boldsymbol{k}\{\cdots\}-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\\ &= \boldsymbol{i}\sum_i\frac{\partial T_{ix}}{\partial x_i}+\boldsymbol{j}\sum_i\frac{\partial T_{iy}}{\partial x_i}+\boldsymbol{k}\sum_i\frac{\partial T_{iz}}{\partial x_i}\\ &\quad -\frac{\partial\boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}}{\partial t}. \quad (4)\end{aligned}$$

ここで三番目の等号では，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5}$$

に左から $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ の外積をとったものと，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{6}$$

に左から $\boldsymbol{B}/\mu_0$ の内積をとったものを利用している．これらもマクスウェル方程式の残る二つの式である．また，T_{ij} と $\boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}$ は次のように定義される．

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \delta_{ij} \frac{E^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \delta_{ij} \frac{B^2}{2} \right), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{em}} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{8}$$

である．ここで，**テンソル**（行列）T_{ij} は**マクスウェル応力テンソル**，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}$ は**電磁場の運動量**と呼ばれている．なお，δ_{ij} はクロネッカーデルタで，次式で定義される．

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases} \tag{9}$$

ここまでの誘導を復習すると，ローレンツ力の式と 4 本の**マクスウェル方程式**しか使っていないことに着目して欲しい．

さて式 (4) は元々分布電荷（および分布電流）に働くローレンツ力であり，分布電荷の持つ単位体積当たりの**力学的運動量** $\boldsymbol{g}_{\mathrm{k}}$ の増加率ともいえるので，以下のように書くことができる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_{\mathrm{k}}}{\partial t} = \nabla \cdot T - \frac{\partial \boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}}{\partial t}. \tag{10}$$

T がテンソルであるため，$\nabla\cdot$ は grad でも div でもないことに注意してほしい．$\nabla \cdot T$ の本当の意味を理解するためには，成分展開の式に立ち返るべきである．この式の両辺をある体積で体積積分すると，次式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV (\boldsymbol{g}_{\mathrm{k}} + \boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}) = \oint_S d\boldsymbol{S} \cdot T. \tag{11}$$

これから，マクスウェル応力が運動量の増加を引き起こすことがわかるが，運動量には $\boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}$ なる電磁場の運動量を含んでいることを理解してほしい．

応力というと苦手な人が多いかとも思うが，要は，空間に小さな直方体を切り取ったときに，yz 面に働く力が (T_{xx}, T_{yx}, T_{zx}) になると理解すればよい．例えば T_{xx} が正のときは引張力，負のときには圧縮力に定義される．それにしても T の要素が複雑である．こうしたときには，この行列の固有値問題を解いて，主軸変換するとよい．

まず，静電場とか静磁場といった静的な場合を考察する．式 (7) の第 1 行の電場に関わる項のテンソルを主軸変換してみよう．すると，主軸は $\boldsymbol{E}$ の方向にあり，その方向の固有値は $\varepsilon_0 E^2/2$ となる．また，第二，第三の主軸はこれと直交しており，その方向の固有値は縮退していて，$-\varepsilon_0 E^2/2$ となる．これから，$\boldsymbol{E}$ の方向に垂直の面は $\varepsilon_0 E^2/2$ の引張力を受け，それと垂直ないずれの方向の面も $\varepsilon_0 E^2/2$ の圧縮力を受けることがわかる．この理由により，電気力線はその方向に縮もうとし，その垂直方向に膨らもうという力を出すことになり，ファラデーの仮説が立証されたことになる．

第 2 節の電気力線のところでも述べたように，例えば，導体上の電荷は常に外向きに引力を受けるのは電気力線の引張力で理解できることとなる．また，導体表面で，同種の電荷同士は横向きに押し合っており，それが故に，電荷は一様に分布するのであるが，それが電気力線の横向きの圧縮力に繋がるのである．

続いて，式 (7) の第 2 行の磁束に関わる項のテンソルを主軸変換すると，電場の場合と同様に，$\boldsymbol{B}$ の方向に垂直の面は $B^2/2\mu_0$ の引張力を受け，それと垂直ないずれの方向の面も $B^2/2\mu_0$ の圧縮力を受けることがわかる．この理由により，磁束線もその方向に縮もうとし，その垂直方向に膨らもうという力を出すのである．

これも第 3 節の磁束線のところで述べたように，電流に働く力は，磁力線に垂直な圧縮力で説明できることになる．例えば，同方向に流れる電流同士が互いに引かれる様子は，これらが作る磁力線が電流の線の間で疎であり，外部で密であること

から，視覚的に理解できる．

式 (7) の電場と磁束の両項を加えたときの主軸変換は，きれいな形にはならない．しかし静的な場合には，電荷は電気力線としか関わらず，電流は磁力線としか関わらないので，それぞれ独立な応力により理解できる．

次に，動的な場合を考察しよう．この場合には，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}$ の時間微分が効いてくるため，電荷や電流に働く力はマクスウェル応力だけでは説明できなくなる．式 (11) の積分の体積をきわめて巨大にしていくと，遠方では場が弱くなっていくため，右辺の応力の表面積分の項は消えていくだろう．残った左辺の項は，力学的運動量と電磁場の運動量の時間微分に関わるものである．通常は，力学的運動量の体積積分は，作用・反作用の法則で 0 になることが期待できるが，そうはなっていない．つまり，作用・反作用の法則は成立しないのである．その差は，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}$ の時間微分により説明できるのである．この作用・反作用の法則の不成立に関して，電磁気学ではきわめて多くのパラドックスが提示されている．しかし，そのすべてが，この電磁場の運動量を考慮することにより，理解できることを知っていてほしい．

5. 物質中のマクスウェル応力

誘電率 ε や透磁率 μ の一様な物質がある場合，マクスウェル方程式の ε_0, μ_0 は，すべて ε, μ に置き換わる．ただし，自由電荷，自由電流にかかる力は式 (1) のまま変らない．したがって，マクスウェル応力テンソル T_{ij} および電磁場の運動量 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}$ は，式 (7) と式 (8) で $\varepsilon_0 \to \varepsilon$, $\mu_0 \to \mu$ としたものに置き換わる．

物質の誘電現象や磁化現象は，分極や磁化といった微視的力学的変形を物質中に生成する．例えば，分極とは，物質中にほぼ均等に存在する正電荷と負電荷の重心をずらす現象であり，一種の弾性現象である．ここに示したマクスウェル応力を利用して電磁場の力を議論すると，力学的変形を含んだ結果が得られ，純粋な電磁場の力は得られない．

例えば，電場に平行に置かれた誘電体表面付近では，$\boldsymbol{E}$ は誘電体内と誘電体外部である真空ではほぼ同じであるので，応力は $\varepsilon E^2/2$ と $\varepsilon_0 E^2/2$ と異なる．しかし，その違いは，実は力学的応力の差であり，電磁気的応力は同じである．平行平板キャパシタの中に誘電体が引き込まれる効果を説明するのに，しばしば，電気力線の横方向の圧縮力の結果であると記載した書が多く見られるが，それは間違いである．そもそも電気力線が物質に側圧をおよぼすとしたら，そこには何らかの議論が必要となる．ただし，仮想変位の原理を利用して引き込み力を計算することは可能である．

こうした間違いを起こさないためには，**自由電荷**や**自由電流**に加え**分極電荷**や**磁化電流**をも含むすべての**全電荷**，**全電流**に対して計算したマクスウェル応力を使うのがよい．電荷や電流として，物質中に誘起される電荷や電流も含むことにすれば，これらは，真空中に存在しているのと同じになるので，先に示した物質のない場合の取り扱いと同じになる．つまり，ρ や $\boldsymbol{J}$ を全電荷，全電流と思えばよいだけである．その結果，誘電体や磁性体に働く力は，式 (7) と式 (8) のマクスウェル応力と電磁場の運動量を使って計算することが可能となる．

例えば，誘電体の表面に分極電荷が誘起されていると電気力線が不連続，つまり E_n が不連続になることが知られているが，この結果，$\Delta(E_n^2/2)$ なる力が誘電体表面に働くことが誘導できる．また，平行平板キャパシタの中に誘電体が中途まで入っている場合には，この誘電体の先端付近での圧縮力は，内外とも $\varepsilon_0 E^2/2$ であり，先端を引き込むような応力は発生しない．ちなみに，この場合，実際に誘電体が引き込まれるのであるが，それは誘電体の角付近のエッジ効果による[3]．

6. エーテルの存在

応力は，通常，何らかの物体が伝達する．この応力を伝える媒質として**エーテル**という仮想的な物体が仮定された．実際，電荷や電流が突然動い

たとすると，その影響はあたかも音波が空中を伝わっていくように，光速で伝わっていく．このように影響がエーテルの隣接点に次から次へ伝わっていくことから，電磁場による力は**近接力**であるとされたのである．

特殊相対性理論が提唱され，エーテル仮説はかえりみられなくなった．しかし，力の伝播を理解する上でエーテルのような仮想媒質を思い描くことは，電磁気学の理解にとっては便利である．さらに，ここには電磁場の運動量やエネルギーさえ存在する．ますますエーテルは便利な仮説である．それをあっさり捨ててしまったのは若干残念な気がする．エーテルも相対性理論に従う媒質であり，たまたま，そこに存在する波動が光速で伝播するため，波動の速度が不変になるという立場をとることも，今なら可能なような気がする．

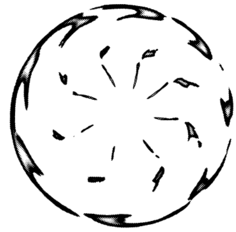
改めて，ファラデーのような直観による仮説が，マクスウェルのような厳密な解析により，示されたのは，実に素晴しいことであったことを再度強調して本稿のむすびとしたい．

参考文献

1) 愛知敬一，“ファラデーの伝—電気学の泰斗”，http://www.aozora.gr.jp/cards/001234/files/46340_24939.html, 1923.
2) 佐々木梗，“ジェームズ・クラーク・マックスウェルの生涯”，http://home.e01.itscom.net/ikasas/jcm/jcmtop.htm, 2010.
3) 岡部洋一，『電磁気学の意味と考え方』，講談社，p.171, 2008.

（おかべ・よういち，放送大学）

量子力学の経路積分的見方



和田 純夫

1. シュレーディンガー方程式から経路積分へ

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-i\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V\right)\psi=H\psi$$

から出発する．括弧の中をまとめて H と書いた．ハミルトニアンである．H は数ではないが（演算子），あたかも数であるかのようにみなして上の微分方程式を積分すれば

$$\psi(x,t)=\mathrm{e}^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)}\psi(x_0,t_0) \tag{1}$$

となる．右辺は微分演算子の指数関数といった，すぐには意味のわからない形を含んでいる．左辺の ψ 内の x と右辺の ψ 内の x_0 は同じではないことに注意．時刻 t_0 での関数 ψ 全体が，時刻 t での ψ を決めるという式である．

上式の意味をはっきりさせるために，まず微小時間 Δt での変化を考える．

$$\psi(x,t+\Delta t)=\mathrm{e}^{-i\frac{H\Delta t}{\hbar}}\psi\fallingdotseq\left(1-i\frac{H\Delta t}{\hbar}\right)\psi(x,t).$$

任意の関数 $f(x)$ について成り立つ公式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int dpdx'\ \mathrm{e}^{i\frac{p(x-x')}{\hbar}}f(x')$$

を上式右辺の ψ に使う（フーリエ変換（x' 積分）し逆変換（p 積分）して元に戻すという式）．すると，H の中の x 微分は $i\frac{p}{\hbar}$ に置き換えることができ

$$H(p,x)\equiv\frac{1}{2m}p^2+V(x)$$

とすると

$$\psi(x,t+\Delta t)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int dpdx'\ \mathrm{e}^{-i\frac{H(x,p)\Delta t}{\hbar}}\mathrm{e}^{i\frac{p(x-x')}{\hbar}}\psi(x',t). \tag{2}$$

そして，これの N 回（$N+1=\frac{(t-t_0)}{\Delta t}$）の繰り返しとして式 (1) を解釈する（ただし $N\to\infty$ の極限を考える）．これが**ハミルトニアン形式での経路積分**だが，経路積分という言葉の意味はまだこの段階ではよくわからない．

ここで，式 (2) の p 積分は ψ とは無関係にできてしまうことに注意しよう（指数が虚数のガウス積分）．

$$\int dp\ \mathrm{e}^{i\frac{p(x-x')}{\hbar}}\ \mathrm{e}^{-i\frac{p^2\Delta t}{2m\hbar}}=\sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{i\Delta t}}\ \mathrm{e}^{i\frac{m(x-x')^2}{2\hbar\Delta t}}.$$

これより

$$\psi(x,t+\Delta t)\propto\int dx'\ \mathrm{e}^{i\frac{L\Delta t}{\hbar}}\psi(x',t), \tag{3}$$

$$\text{ただし } L(x,x')=\frac{m}{2}\left\{\frac{(x-x')}{\Delta t}\right\}^2-V$$

となる．L の第 1 項を $\frac{mv^2}{2}$ とみなせば第 1 項は運動エネルギー T であり，$L(=T-V)$ はラグランジアンである．式 (3) を N 回繰り返した形（ただし $N\to\infty$）を**ラグランジアン形式での経路積分**という．ファインマンとヒッブスによる有名な経路積分の教科書[1)]に書かれている公式である．

しかしそもそも経路とは何か．式 (3) の繰り返

しとして式 (1) を書くと

$$\psi(x,t) \propto \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod dx_i\right) \mathrm{e}^{i\frac{S}{\hbar}} \psi(x_0,t_0), \quad (4)$$

ただし $S = \sum L(x_i, x_{i-1}) \Delta t.$

この式の，$\int(\prod dx_i)$ という積分の意味を考えよう．各時刻 t_i での x 積分を繰り返しているわけだが，全体をまとめて考えると，x_0 から x にいたるすべての数列 $(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, x)$ を考え，各数列に対して被積分関数を計算しそれをすべて足し合わせる操作とみなせる．$N \to \infty$ の極限では x_0 から x までを連続的につなぐ経路 $x(t)$ についての和になる．これが，上式が経路積分と言われる理由である．

2. 経路積分に基づく粒子像

このように，シュレーディンガー方程式から経路積分を導くのが通常，教科書に書かれていることである．シュレーディンガー方程式自体は古典力学の量子化という手順で導かれる．しかし量子力学のほうが古典力学よりも基本的な理論なのだから，古典力学から量子力学を導くというのは本末転倒だろう．場の量子論から出発して量子力学を導くという筋道はあるが，いずれにしろ古典論よりも量子論のほうが基本である．

古典力学でニュートンの運動方程式を論理的に導くことはできないが，慣性の法則から出発してそのもっともらしさを議論することはできる．同様に，量子論をその粒子像から導こうとするとしたらどうしたらいいだろうか．ここではあまり深入りできないが，経路積分という発想が基本になるというのが私の考え方である[2]．経路積分では，一つの粒子を扱っている場合でも無数の経路を同時に考えなければならない．各経路に対して $\mathrm{e}^{i\frac{S}{\hbar}}$ という値が割り当てられ，それらの足し合わせで最終結果が決まる．$\mathrm{e}^{i\frac{S}{\hbar}}$ は，絶対値は 1 だが位相が変わり，足し合わせると増えたり減ったりする（一般には減る）．干渉である．一つの対象（粒子）であっても無数の状態が共存し，それが互いに干渉し合いながら時間発展していくというのが量子論での基本的な粒子像であることが，経路積分によって明確に見えてくる．そのような視点から，経路積分の公式のもっともらしさの議論を出発点にして，そこからシュレーディンガー方程式を導くという，第 1 節の議論とは逆の方向が，量子力学に対する正しい姿勢だと私は思っている．

経路積分から見えてくるもう一つのポイントを説明しよう．式 (4) で被積分関数が $\mathrm{e}^{i\frac{S}{\hbar}}$ であることの意味を考えよう．$S(=\int L dt)$ は古典力学でも登場する量で**作用**と呼ばれる．経路 $x(t)$ を変えると S も変わる．S が変われば $\mathrm{e}^{i\frac{S}{\hbar}}$ の実数部も虚数部も符号が入れ換わり，和をとると一般に打ち消し合う．しかしそうならない特殊な経路がある．たとえば次の積分を見てみよう．

$$\int dx \; \mathrm{e}^{i(ax^2+bx)} = \sqrt{i\frac{\pi}{a}} \; \mathrm{e}^{-i\frac{b^2}{4a}}.$$

結果の $\mathrm{e}^{-i\frac{b^2}{4a}}$ は，被積分関数の微分がゼロになる値 $x = -\frac{b}{2a}$ での被積分関数の値である．微分がゼロになるところ（停留点という）では被積分関数の変化が止まるので，打ち消し合いではなく積み重ねが起こり，それがこの積分全体の結果を決めている．

経路積分の場合も同様である．経路積分は多重積分だから，微分ではなく変分（各 x_i での微分）で考えなければならない．そして S の変分がゼロという式は古典力学でラグランジュ方程式と呼ばれているものに他ならない．それはニュートンの運動方程式と同等の方程式であり，その解は，古典力学での物体の軌道に他ならない．つまり式 (4) の近似解として

$$\psi(x,t) \propto \int dx_0 \; \mathrm{e}^{i\frac{S_\mathrm{c}}{\hbar}} \psi(x_0,t_0) \qquad (5)$$

という形が考えられる．ただし S_c は，時刻 t_0 で x_0 から出発し，時刻 t で x に到達する古典力学での物体の軌道を代入して得られた作用 S の値である（c は classical の c）．この近似がよければ，量子論における粒子は無数の経路を通れるにもかかわらず，実質的に未来を決めているのは古典力

学で決まる経路（およびそれと $e^{i\frac{S}{\hbar}}$ があまり変わらない古典軌道に近い経路）であるということになる．もちろんこのような近似がよくないケースも多々あり，それは古典力学が成立しない世界になる．

3. 自由粒子と井戸型ポテンシャル

このように概念的には経路積分のほうがすぐれた考え方に私には思えるが，実用的にはどうだろうか．量子力学の入門書では経路積分は中心的なテーマではない．場の量子論のレベルになると経路積分は盛んに使われるが，量子力学の基本的な問題はシュレーディンガー方程式を使って解くのが普通である．そこに経路積分を持ち出すのは大げさだという印象をもっている人も多いだろう．

この稿では以下，量子力学の基礎的な問題が経路積分でどのようにして解けるかという，通常の教科書では書かれないことを解説する．シュレーディンガー方程式ではわからない側面が見えて興味深い．

この節では自由粒子の説明の後，井戸型ポテンシャルの離散スペクトルを求めるという問題を考えよう．まず，式 (3) で $V=0$ という，力を全く受けていないケース（**自由粒子**）を考える．式 (4) は N 回の多重積分となるが，それぞれはガウス積分（被積分関数の指数部分が 2 次式であるということ）なので，式 (5) のような公式で計算できる．結果を

$$\psi(x,t)=\int K(x,t;x_0,t_0)\psi(x_0,t_0) \qquad (6)$$

と書くと（K を**ファインマンの積分核**という）

$$K=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}\ \mathrm{e}^{i\frac{m}{2\hbar}\frac{(x-x_0)^2}{T}}$$

となる（$T=t-t_0$）．この K があらゆる波動関数 ψ の時間発展を決めているのだが，次のような書き換えが可能である（$E_k=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ とする）．

$$K=\int dk\ \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-i\frac{E_kT}{\hbar}}\ \frac{\mathrm{e}^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (7)$$

$\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ とは，$V=0$ の場合のシュレーディンガー方程式の，エネルギー E_k の規格化された解である．この展開式はブラケット表示では $K=\sum|k,t\rangle\langle k,0|$ である．K がこのように展開できることは，完全系という概念を考えれば当然なのだが，逆に考えれば，この粒子のエネルギー固有状態が $\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ であることの証明にもなっている．$V=0$ の場合にはわざわざ証明するほどのことではないが，$V\neq 0$ の場合の準備として確認した．

次の例として，無限に高い壁をもつ**井戸型ポテンシャル**の問題を考えよう．$0<x<d$ の区間のみ $V=0$ であり，その他の x では $V=\infty$ というケースである．壁があると，そこに衝突した経路に対応する $e^{i\frac{S}{\hbar}}$ は符号を変える（固定端反射…境界での L の効果とみなせる）．したがって，壁にぶつかった経路はその後は，ぶつからなかった経路と分けて考えなければならない（最初は x に制限を付けないで経路を考え，後で折りたたむと考えるとわかりやすくなる）．その結果，（$0<x_0<x<d$ として）x_0 から x に到達する経路については，まず右に進んで壁にぶつかってから n 回往復して x に右から到達する経路，同様にして左から到達する経路，また左に進んで n 回往復してから x に左から到達する経路，右から到達する経路の 4 グループの経路に分けて考えられる（$n=0$ を含む）．L は境界を除き自由粒子の場合と同じなので，まとめて式に書くと

$$K=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\mathrm{e}^{i\frac{m}{2\hbar}\frac{(x-x_0+2dn)^2}{T}}-\mathrm{e}^{i\frac{m}{2\hbar}\frac{(x+x_0+2dn)^2}{T}}\right\} \qquad (8)$$

となる（負の n まで含めて 4 つのグループを 2 つの項にまとめてある）．n についての和を計算するには，まず各項を（k 積分を導入して）式 (7) と同様の変形をする．すると n についての和はポワソンの公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i2\pi an}=\sum_{\tilde{n}=-\infty}^{\infty}\delta(a-\tilde{n})$$

を使って計算でき（$a=\frac{kd}{\pi}$），δ 関数によって k 積

分をすると $k=\pi\frac{\tilde{n}}{d}$ として

$$K=\frac{1}{2L}\sum_{\tilde{n}=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\frac{E_kT}{\hbar}}\ \{\mathrm{e}^{ik(x-x_0)}-\mathrm{e}^{ik(x+x_0)}\}$$
$$=\frac{2}{L}\sum\mathrm{e}^{-i\frac{E_kT}{\hbar}}\sin kx\sin kx_0 \qquad (9)$$

となる．この式は，この粒子のエネルギー準位と固有関数がそれぞれ E_k と $\sin kx$ であることを示している．

4. 量子化条件

以上で（壁が無限大の）井戸型ポテンシャルの問題が解けたことになるが，最後は無理やり数学の公式にあてはめて結果を出したという印象も受ける．そこで，幅広い応用が可能な別の考え方も紹介しておこう．

結果が式 (9) のような形に書ける場合，$\mathrm{e}^{i\frac{ET}{\hbar}}$（$E$ は任意の定数）を掛けて T で ∞ まで積分すると，E がいずれかの E_k に等しい場合に答えが無限大になる．したがって，まだ E_k の値がわからない (8) のような段階でも，$\mathrm{e}^{i\frac{ET}{\hbar}}$ を掛けて積分し，答えが無限大になる E の値を求めれば，E_k，つまりエネルギー準位が得られることになる．そしてそのときの ∞ にかかる関数を求めれば，それがそのエネルギー準位での波動関数になる．

式 (8) に $\mathrm{e}^{i\frac{ET}{\hbar}}$ を掛けて T で積分するという計算は厳密に行うことができるが，ここではむしろ，他の例にも適用できる近似法を説明しよう（半古典近似あるいは WKB 近似と呼ばれる手法の一種である）．まず，

$$f_{n\pm}(T)\equiv\frac{m}{2}\frac{(x\pm x_0+2Ln)^2}{T}+ET$$

という関数を定義する．そして式 (8) の和の一つずつの項の積分を

$$\int_0^{\infty}dT\ \frac{\mathrm{e}^{i\frac{f(T)}{\hbar}}}{\sqrt{T}}\propto\mathrm{e}^{i\frac{f(T_\mathrm{c})}{\hbar}} \qquad (10)$$

と近似する．T_c は $\frac{df}{dT}=0$ の解（ここでは計算は省略するが，$\sqrt{T}$ は積分で出てくる因子と打ち消し合う）．これは式 (5) で説明した手法であり，積分を被積分関数の停留値で代表させる．具体的には

$$-\frac{m}{2}\frac{(x\pm x_0+2dn)^2}{T_\mathrm{c}^2}+E=0$$
$$\to T_\mathrm{c}^2=\frac{m}{2E}(x\pm x_0+2dn)^2.$$

また上式より $f_{n\pm}(T_\mathrm{c})=2ET_\mathrm{c}$ でもあるので

$$(10)\ \text{の右辺}=\exp\left(i\sqrt{2mE}\ \frac{(x\pm x_0+2dn)}{\hbar}\right).$$

これの $n=\infty$ まで和をとるのだから，答えが発散する条件，つまりエネルギー準位を求める式は，n_E を任意の定数として次のように決まる．

$$\sqrt{2mE}\times\frac{2d}{\hbar}=2\pi n_E \qquad (11)$$
$$\to E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2md^2}\ n_E^2.$$

説明は省略するが，式 (11) は実は次の式の特殊ケース（$V=0$ のケース）である

$$\int\sqrt{2m(E-V)}\ \frac{dx}{\hbar}=2\pi n_E.$$

積分は古典軌道の一周期分である．この式は**ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件**に他ならない．古典軌道がポテンシャルの中を 1 回往復したときの $\mathrm{e}^{i\frac{S}{\hbar}}$ の位相変化が，T を周期として $\mathrm{e}^{-i\frac{ET}{\hbar}}$ になるような場合に束縛状態が生じるのである（境界が滑らかな場合には右辺は $n_E+\frac{1}{2}$ にしたほうが，より正確になるが，経路積分でそのことを説明するには，前因子を含めたさらに詳しい議論をしなければならない）．

5. 調和振動子

調和振動子は経路積分の代表的な応用例であり，ファインマンの本にも詳しい説明があるが，もう少し簡潔にできるのではという側面もある．そのようなことも含めて結果を概説しよう．

ラグランジアンを

$$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2-m\frac{\omega^2}{2}x^2$$

とする．$\dot{x}$ は $\frac{(x_i-x_{i-1})}{\Delta t}$ という差分だとする．ポテンシャルも含めて $(x_i,\ i=1\sim N)$ の 2 次式になっているので，経路積分は多変数のガウス積分になり

厳密に計算できる．方針は，まず $(x, x_0, T = t - t_0)$ が与えられたときの停留点となる経路（古典軌道）$x_{\rm c}(t')$ $(t > t' > t_0)$ を求めて，その作用 $S_{\rm c}$ を計算する．具体的には

$$x_{\rm c}(t') = \frac{x \sin\omega(t' - t_0) - x' \sin\omega(t' - t)}{\sin\omega(t - t_0)}$$

$$\to S_{\rm c} = \frac{m\omega}{2\sin\omega(t - t_0)} \times [(x^2 + x_0^2)\cos\omega(t - t_0) - 2xx_0]. \tag{12}$$

すると $K = F\,{\rm e}^{i\frac{S_{\rm c}}{\hbar}}$ と書け，前因子 F は古典軌道からのずれについての積分になる．S が二次関数ならばこれは多重のガウス積分になり，結果は $N \times N$ の行列の行列式になる．

この行列式の計算方法には幾つかあり，たとえばファインマンの本では，固有値の積を求めるという方法が使われている．また別の方法として，行列式の N についての漸化式を求めてそれを解くという方法も知られている．こちらの方法のほうが一般性があるが，さらに，漸化式の解の性質から，前因子 F を $S_{\rm c}$ から直接求める方法もわかっている（作用が二次以下の式ならば常に成り立つ[3]）．それによれば

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar}} \left(-\frac{\partial^2 S_{\rm c}}{\partial x \partial x_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

である．式 (12) を代入すると

$$-\frac{\partial^2 S_{\rm c}}{\partial x \partial x_0} = \frac{m\omega}{\sin\omega T}$$

なので，結局，答えは次のようになる．

$$K = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega T}}\ {\rm e}^{i\frac{S_{\rm c}}{\hbar}}.$$

この式の中に調和振動子に関するすべての情報が含まれている．たとえばエネルギー準位を求めるには，まず $x = x_0$ として x で積分する．時間に依存しない比例係数は無視して式を書くと

$$\int dx\ K(x, x, T) \propto \frac{1}{\sqrt{\sin\omega T}} \times \sqrt{\frac{\sin\omega T}{1 - \cos\omega T}} \propto \frac{1}{\sin\omega\frac{T}{2}} \propto \sum {\rm e}^{-i\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)T}.$$

これより，調和振動子のエネルギー準位が$\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$であることがわかる．各準位の波動関数も，式(11)で$\mathrm{e}^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)T}$で展開すればその係数が波動関数の二乗になっている．ファインマンの本ではその展開の最初の3項（第2励起状態まで）だけを求めている．これ以上，手計算で進むのは難しい．数学公式集に書いてある式を使えば，一般的な展開式が得られ[3]，波動関数が一般にエルミート多項式を使って表されることがわかるが，それでは答えを教えてもらっただけのようで，導いた気はしないだろう（ただし基底状態だけだったら，$t \to -i\infty$の極限を考えるとよい）．

そこで別の方法を考えることになるが，井戸型ポテンシャルの場合のようにe^{iET}を掛けて積分する方法もある．しかしコヒーレント状態というものを使うと答えが簡単にすっきり求まる[4]．コヒーレント状態とは波束が形を保ったままポテンシャルの中で振動する解である．初期条件が

$$\psi(x, t=0) \propto \mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-a)^2}$$

だとすると，一般の時刻でのψはKを使えば得られ（$\eta = \mathrm{e}^{-i\omega t}$とする）

$$\psi(x,t) \propto \eta^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 - 2\eta a x + \frac{(1+\eta^2)}{2}a^2\right)}.$$

これは無限個のエネルギー準位を含んでおり，各状態はηで展開したときの各項の係数である．それは上のψをηで何回か微分した後，$\eta = 0$とすれば得られる．それがよく知られたエルミート多項式の指数関数による表示になっていることは，関心のある方は確かめていただきたい（aは任意なので適切に選ぶと計算が楽になる）．

6. クーロン・ポテンシャル

水素原子の問題は，計算の複雑さの他に，ポテンシャルに特異点があるという原理的な困難がある．電子が原点に落ち込むプロセスは量子論では揺らぎによって避けられるはずだが，時間間隔を有限個に分割する経路積分では，揺らぎが十分に取り入れられないことが障害になるとされる．しかし比較的最近，この問題は解決されたようなので簡単に紹介しておこう[3]．

ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 - \frac{e^2}{r}$$

と書けるが，$r=0$の特異点が問題になる．そこで新たなハミルトニアン$\tilde{H}$として

$$\tilde{H} \equiv r(H-E) = \frac{1}{2m} r\boldsymbol{p}^2 + rE - e^2 \quad (13)$$

とし，この$\tilde{H}$の経路積分を考える．ハミルトニアンが違うのだから正しい積分核Kは得られないが，$\tilde{H}$のゼロ固有値の固有関数は元のHの固有関数と一致する．また，ゼロ固有値が生じるようなEの値が，元のHの固有値になる．

式(13)に対応するラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2r}\dot{x}^2 - rE + e^2 \quad (14)$$

となる．もう一つのテクニックとして4次元目の仮想上の空間方向x_4を導入し，運動エネルギーの部分にその項を加える．x_4に依存しない固有状態を求めるので，この操作は経路積分の結果に何も影響を与えないが，計算のために導入する新しい4変数$u_i\ (i=1\sim4)$は，4変数$x_i\ (i=1\sim4)$すべてを使って定義される（この変数変換は元は天文学で考えられたものらしい）．たとえば

$$dx_1 = 2(u_1 du_2 + u_4 du_2 + u_1 du_3 + u_2 du_4).$$

他のx_iも同様の形であり，x_iはu_iの2次式に置き換わる．u_iで表されるラグランジアンL_uは

$$L_u = 2m(\dot{u}^2 - \omega^2 u^2) + e^2$$

（$\omega^2 = -\frac{E}{2m}$）．ただしu^2は4次元ベクトルu_iの内積であり，このシステムは4つの調和振動子によって表されることがわかる．

上記のラグランジアンを使って得られる経路積分の積分核K_uは

$$K_u = \mathrm{e}^{i\frac{e^2 t}{\hbar}} \times K_{\text{調和}}$$

という形に書ける．ただし$K_{\text{調和}}$は，角振動数が上記ωに等しい調和振動子4つ分の積分核である

（式 (14) に対する K は K_u を x_4 で積分して得られる）．

K_u の中にエネルギーゼロの状態が含まれているだろうか．$K_{調和}$ は4つの調和振動子の合計なので，K_u が含む状態のエネルギー準位 E_u は，n を自然数として

$$E_u = -e^2 + \hbar\omega(2(n-1)+2)$$

と書ける．ただし右辺第2項の最後の2は零点エネルギーの合計であり，最初の係数2は，u で表されたときの偶関数のみが元の系の状態に対応するためのものである．そして $E_u = 0$ という条件から ω が決まり，

$$E = -2m\omega^2 = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$$

と，水素原子のエネルギー準位が得られる．波動関数も K_u から得られるが，その計算はかなり面倒である（調和振動子では指数部分が2次式だが水素原子では1次式であることは x と u の関係からすぐにわかり興味深い）．

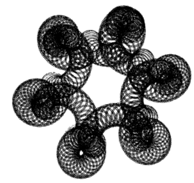
参考文献

1) ファインマン，ヒッブス：『量子力学と経路積分』（みすず書房）．
2) 和田純夫：『グラフィック講義 量子力学の基礎』（サイエンス社）．
3) H. Kleinert: *Path Integral in Quantum Mechanics, Statistics, and Polymer Physics*, World Scientific.
4) 和田純夫：執筆中．

（わだ・すみお，東京大学大学院総合文化研究科）

多様な熱力学

エントロピーの３つの顔



佐々　真一

1. 多様な熱力学

書店や図書館で熱力学の教科書をいくつか手にとってみよう．個々の説明だけでなく，章立てなど本の構成にもかなりのバラエティーがあることに気づくだろう．数多くの熱力学の教科書の中で，まずここで紹介したいのは，田崎晴明さんの本[1]と清水明さんの本[2]である．ともに完成度が大変高く，著者の長期にわたる熱意が結実した作品である．私たちが本を執筆するときに見本とすべきであろう．

ところで，この２つの教科書を比べると，同じ学問を議論しているとは思えないくらいに構成が異なる．田崎本では，温度計の目盛として温度をさっと認め，温度一定の環境下における力学的操作限界などの知見を積み重ねる．清水本では，熱力学の主役である**エントロピー**を早々に登場させる．最終的に構成される体系は同じだが，温度とエントロピーの導入の仕方が全く異なる．

さらにいえば，この２つの教科書とも，他の多くの教科書と区別される特徴を持っている．それは，「熱を避ける雰囲気」である．伝統的な熱力学の教科書に従った構成[3]では，熱とは熱接触による温度変化で定量化される量である．測定を通じて定義するので，様々な状況毎に考えざるを得ない．こういう一般性のなさは確かに気持ち悪い．おそらくそのことと関係して，「正体がはっきりしないもやもや感」も覚える．この感覚を避けるために，田崎本でも清水本でも熱に正面から向かっていないのだと想像する．それにしても，熱力学の本で熱を遠回しにできるのは不思議な気がするかもしれない．むしろ，熱を前面に出さなくても熱力学を理解することができることに熱力学という学問の特徴があらわれている．

科学は，いくつかの事実と原理を前提にして知識を論理的に積み上げることにより，多くの事実を体系的に説明する営みである．その際，最初に前提にする事実や原理の選択には自由度がある．前提にするのは少ないほどよいだろうし，その一方，様々な問題に素早く適用したい．しばしばこの２つは同じ方向を示すわけではないし，科学のどの部分を理解したいのかにも依存する．熱力学の教科書のバラエティーは，熱力学の理解の仕方のバラエティーを意味する．そしてこのバラエティーが熱力学の理解を難しくする要因の一つかもしれない．

本記事では，このような熱力学の理解の仕方の多様性そのものに焦点をあてる[*1]．以下では，「理解の仕方の」という言葉を省略し，熱力学やエントロピーの多様性，熱力学やエントロピーの分類という言葉を使う．図１で示しているように，熱力学を３つのタイプに分類し，それぞれに対応し

*1)　熱力学に対する筆者の考え方の簡潔なまとめを本誌の記事[4]に見ることができる．また，少し変わっている（が本質的な）エントロピー導入の方法については本誌の記事[5]が面白いと思う．本記事は，それらに続く「エントロピー第３弾」という位置づけにもなっている．

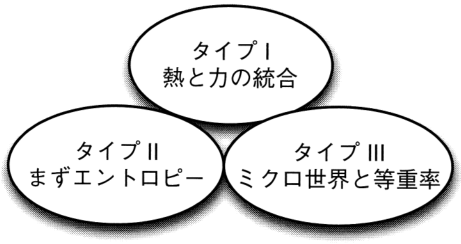


図 1　多様な熱力学の概念図.

たエントロピーの表現を紹介する．熱力学やエントロピーそのものは本来一義的だが，理解の仕方の多様性を踏まえて，熱力学やエントロピーの概念も拡張されつつある．そのような発展のダイナミクスも議論したい．

2. タイプ I——熱と力学の統合

伝統的な熱力学から論じよう．それは，熱学と力学を統合的に論じる学問としての熱力学である．つまり，熱・熱容量・温度によって特徴づけられる体系である熱学と力・仕事・エネルギーによって特徴づけられる体系である力学を同じ土俵で捉えようとする．その場合の出発点の概念は，測定方法の指定と組になっている．例えば，温度は「温度計の目盛」で尽きており，「温度とはそもそも何か」という問いを出さない．熱は熱接触と温度変化で定量化される量であり，「熱とはそもそも何か」という問いも出さない．

このような「そもそも」と聞きたくなるのは，先に習得した力学を踏まえないと気持ち悪いと感じるからであろう．物理学における力学的世界観至上主義とでもいうべきであろうか．身の周りにはリンゴが落ちるだけでなく湯が水になる現象もあるのだから，測定可能量である温度をそのまま受け入れてもいいと思うが，その開き直りは拒否したいのだろう．若いときの筆者もそうだったので，その気持ちはよく分かる．

伝統的な熱力学では，異なる測定手段によって得られる熱と仕事が同じ次元のエネルギー移動として実験的に捉えられることを認め，その一方で，熱と仕事の本質的差異を原理として掲げる．前者の熱と仕事の等価性が**ジュールの実験**によって突破された非自明な発見である．そして，その結果として定義される量が内部エネルギーである．後者の熱と仕事の本質的差異を表現したのが「第 2 種永久機関が存在しない」という**ケルビンの原理**である．それを踏まえて，カルノーの天才的な考察を呼び戻して，クラウジウスは平衡状態 Σ におけるエントロピーを

$$S(\Sigma) - S(\Sigma_0) = \int \frac{d'Q}{T} \qquad (1)$$

によって与えた．ここで，T は温度であり，積分は平衡状態を点とする状態空間において基準状態 Σ_0 から考えている状態 Σ に至る任意の経路に沿って行う．$d'Q$ は微小な準静的過程で環境から受け取る熱である．

素朴な測定量から抽象的な量である内部エネルギーやエントロピーが定義されていく様を見るのは壮観である．そしてそのように構成された世界がすごい．例えば，単成分気体に対してエントロピー S を内部エネルギー E と体積 V の関数として与えると，そのたった一つの関数で熱容量と状態方程式の両方の性質を表現できる*2)．これが熱学と力学の統合に他ならない．具体的な統合のされ方は，**熱力学の基本関係式**

$$dE = TdS - pdV \qquad (2)$$

により理解される．p は圧力であり，$-pdV$ が僅かにゆっくりと体積変化させるときに物質にする仕事である．例えば，(2) 式より，「熱容量の体積依存性が状態方程式から決まる」という驚きの事実が導かれる*3)が，この事実がまさに「熱学と力

*2)　内部エネルギーを温度と体積の関数とした $E(T,V)$ を考える．その温度依存性は定積熱容量から，体積依存性は状態方程式から決まる．しかし，$E(T,V)$ から状態方程式を一意に定めることはできない．それに対し，$S(E,V)$ は，熱容量と状態方程式から決まるし，かつ両方を決めることができる．このような熱力学関数は特別な役割を担う．

*3)　定積熱容量を C，自由エネルギーを F とかく．

$$\frac{\partial C(T,V)}{\partial V} = T\frac{\partial^2 S(T,V)}{\partial V \partial T} = -T\frac{\partial^3 F(T,V)}{\partial V \partial^2 T} = T\frac{\partial^2 p(T,V)}{\partial^2 T}$$

がその事実の導出である．導出そのものは簡単な演習問題であるが，その主張の非自明さを味わいたい．

学の統合」という熱力学の本質的側面を例示している．

さらに驚くべきことに，このエントロピーは，私たちが自然現象に対してできることの限界を定式化する．一言でいって，「孤立した系に対しては，どのような力学操作をしてもエントロピーを減らすことができない」という法則である．通常，「エントロピー増大の法則」と呼ばれるが，「エントロピー減少不可能性の法則」のほうがより適切な名前かもしれない．

田崎本に対する注釈：タイプI熱力学の中でも，論旨の組み立てや説明の仕方にはいろいろな流儀がある．先に紹介した田崎本は，タイプI熱力学の中にいて，もっとも大胆に構成を組みなおしたものである．温度は測定量としてすぐに認めるが，熱はできるだけ後回しにし，仕事を中心にした構成である．これは，熱力学を操作的に構成する立場にたったとき，操作の基本はきちんと定義されたマクロ力学にあるという考え[*4)]からきているのだと想像する．

3. タイプII――エントロピーありき

エントロピーは，熱と力学を統合するだけでなく，自然に対する操作限界も定式化する．このように全く異なる側面を持つことから，タイプIとはかなり様相の異なる熱力学がある．もっとも不思議で強力なエントロピーをとにもかくにも認めてしまうのである．ただし，エネルギーや仕事の力学的概念は既知とし，その上にエントロピー概念を追加する[2,6)]．例えば，清水本では，平衡状態をその変分原理によって特徴づけるエントロピーの存在を認め，その性質について要請することから始める．解析力学でラグラジアンをともかく認めて，そこから力学世界を構成するのと同じのりだと思えばよいだろうか．すべての量が自然に順番に定義されていくので，迷いがない．その熱力学では，熱容量や状態方程式はエントロピー関数から決まる．

ただ，このすっきりした熱力学では，エントロピーの存在やその要請がどこからきたのかを問うことができない．初めにあるのだから，そこは認めないといけない．繰り返しになるが，何かは前提にしないといけない．伝統的な熱力学では，温度や熱を測定を通じてまず認め，第2種永久機関が存在しないことを要請した．それらの代わりに，いくつかの要請を満たすエントロピーを認めるのである．では，目前にある物質に対して，「じゃあ，この物質のエントロピー関数はどうなっているの？」と聞かれたなら，熱容量や状態方程式などの測定可能量まで降りてきて，そこで逆解きをしてエントロピー関数を決めることになる．論理的には何も問題はない．

実は，筆者には，解析力学と同じように見えない．初めにあるべきラグラジアンについてあれこれ考察するのは，様々な問題において見通しがよい．例えば，一般相対論で物理の要請と幾何学の概念を準備したあとでラグラジアンをさっと書いて重力方程式を得るのは明晰である．それに対し，エントロピー関数をあれこれいじって物質の何かを議論することはない[*5)]．

そこで，いくつかの要請を満たすエントロピーの存在を前提にする代わりに，エントロピー関数が別の原理から導かれるようにしたくなる．ただし，その原理はあくまで力学世界にとどまっていてほしい．つまり，伝統的な熱力学のように熱の世界を前提にするのでなく，エネルギーと仕事に基づく力学世界からエントロピーに到達したい．その流儀はカラテオドリによって始められた．エネルギーと仕事を力学によって定義し，**孤立した系に対する操作で遷移できない状態があること**を仮定する．そこからエントロピーを定義することができる．

もっと抽象的に，「状態遷移が実現可能であるこ

*4）「熱はマクロ的に操作しきれないエネルギー移動」という表現はおそらく真実の一端を捉えている．しかし，それを「マクロな仕事によるエネルギー移動でない部分を熱とする」以上に理解するのは困難である．そうならば，まず仕事だけに着目するのが一つの見識である．

*5）しかし，皆が「エントロピーありき」に慣れていないだけではないか，という指摘があることに注意したい．

と」を平衡状態間の「関係」として公理的に導入する熱力学もある[7]．具体的に，孤立した系に対する力学操作によって実現する平衡状態 Σ から平衡状態 Σ' への遷移を断熱過程とよび，$\Sigma \to \Sigma'$ とあらわす．このとき，$\to$ に対する公理を導入する．状態と遷移だけを出発にするのでそもそも力学の構造すら入っていないが，この断熱過程の公理は素晴らしくよくできており，現実の断熱過程を特徴づけるのに必要にして十分なように見える．断熱過程の世界を定式化したあとで，断熱過程 $\Sigma_0 \to \Sigma_1$ は実現できるが，最初と最後を逆にした断熱過程 $\Sigma_1 \to \Sigma_0$ は実現できない 2 つの状態 Σ_0, Σ_1 が存在することを仮定し，エントロピーの基準状態とする．$S(\Sigma_0) = S_0$, $S(\Sigma_1) = S_1$ とおく．S_0, S_1 は $S_1 > S_0$ を満たす任意の数である．このとき，Lieb と Yngvason は断熱過程の公理に基づいて，次の**エントロピー原理**を示した．

エントロピー原理：断熱過程 $\Sigma \to \Sigma'$ が実現可能であることの必要十分条件が $S(\Sigma) \leq S(\Sigma')$ としてかける示量変数 S が本質的に一意[*6] に存在する．

そして，このエントロピーについて，

$$f(\lambda) = (1-\lambda)S_0 + \lambda S_1 \tag{3}$$

を使ったエントロピーの表現

$$S(\Sigma) = \sup_{\lambda}\{f(\lambda) | ((1-\lambda)\Sigma_0, \lambda\Sigma_1) \to \Sigma\} \tag{4}$$

を導いた．エントロピー原理に基づくエントロピーの特徴づけは非常にエレガントである．そして，その原理に直結するエントロピーの表現 (4) は単純かつ本質的に思える．

Lieb と Yngvason の論文[7] では抽象的な議論を展開しているが，エントロピー原理とエントロピーの表現 (4) 式を具体的な議論で導くこともできる[5]．あるいは，ケルビンの原理を前提にし，エントロピー原理を導くことによってエントロピーを定義する方法もある[3]．その際，途中で (4) 式と本質的に同じ式を経由する．

*6) 正確には，目盛り間隔の不定性と絶対値の基準点の不定性を除いて一意という意味である．

4. タイプ III——ミクロ世界からの熱力学

熱力学の普遍的体系はそれ自体素敵なものだけど，どうやっても抽象的な概念の導入を避け得ない．もっと具体的に手に取る感じで理解したいと思う．それをするには，むしろマクロ世界にとどまらず，ミクロな世界の記述に基づいたほうがよい．マクロな物質を構成する原子の世界を前提にし，その運動がハミルトン力学，あるいは，量子力学に従うとする．その力学法則はマクロな力学世界とは異なり，摩擦など個性の強い諸々はなく，綺麗な法則で表現される．端的にいって，古典力学であろうと量子力学であろうと，ハミルトニアンさえ与えれば，力学状態の時間変化は決まる．

「物体が平衡状態にある」ということをミクロな力学世界において表現したのが，**等重率の原理**である．マクロに区別可能な状態を特徴づける変数の値を指定して，対応するミクロな力学状態を区別することなくランダムに選べば，平衡状態にあると考えてよいという前提である．この原理に従って，熱力学を順次構成することができる．温度は，限りなく大きな系に接触した小さな巨視系の確率分布のパラメータとして定義され，確かに，それが熱力学の温度と一致することが分かる．また，エントロピーの表現として

$$S(\Sigma) = -k_B \int d\Gamma p(\Gamma;\Sigma) \log p(\Gamma;\Sigma) \tag{5}$$

を選ぶことができる．k_B はボルツマン定数であり，$p(\Gamma;\Sigma)$ は平衡状態 Σ におけるミクロな自由度 Γ に対する分布関数である．$p(\Gamma;\Sigma)$ として等重率の原理に相当するミクロカノニカル分布を選ぶと，$S(\Sigma)$ は状態数の対数から決める**ボルツマン公式**になるし，他の平衡分布，例えば，カノニカル分布を選んでも自由エネルギーの定義と熱力学関係式よりエントロピーを与える．

非常に大自由度な力学世界の確率分布の扱いが必要になるので，必要とされる数学の難度は高くなる．それでも具体例を通して順番に計算しなが

ら確認することができる意義は大きい．熱力学で分からなかった概念が統計力学で分かったと感じる人が多いのも具体的な計算によっていると思われる．操作限界に関しても，操作する前の（熱力学の意味での）平衡状態に対していつも等重率の原理を仮定してよい*7)なら，熱力学第2法則を導出することができる[9]．

5. 発展する熱力学

図2に示されているように，タイプI, II, IIIの熱力学に対応して，エントロピーの3つの表現を見ることができる．具体的には，(i) 熱による表現(1)式，(ii) 非減少不可能則による表現(4)式，(iii) 統計力学による表現(5)式である．これらが同じエントロピーを与えているのは驚きである．そして，この3つの異なる表現が同じようにみえるとき，多様な熱力学を真に理解したことになる．

エントロピーの多様な表現の存在は，エントロピーが熱力学の枠に収まらない可能性を示唆している．例えば，エントロピーの熱による表現を気にせず，確率と操作限界に着目することが可能である．その路線で結実したのがシャノンの情報理論である．

具体的に議論しよう．現代では，多くの人がデータを圧縮して保存する．しかし，いくらでも圧縮可能なはずがないことは容易に想像できる．データを転送するときに，ノイズが加わってデータの一部が壊れることがある．従って，ノイズに耐えるためには工夫が必要であることも想像できる．圧縮効率の限界や最適な工夫などを定式化すると，エントロピーの統計力学表現が登場するのである．この類似性を生かして，情報科学の様々な問題に対して統計力学の手法を使うことができる．特に，**レプリカ法**などランダム系の統計力学で開発された計算方法は情報科学に対しても強力な武器になっている[8]．

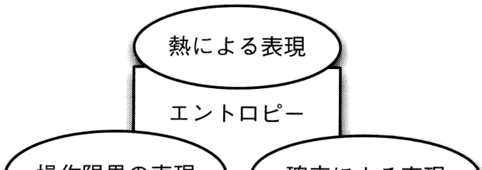


図2　エントロピーの3つの顔．

ただし，同じ表現のエントロピーがあらわれても，「データのやりとり」と「ピストンの操作」は質の違うものだし，情報理論と熱力学は別の学問である．しかし，「データのやりとり」と「ピストンの操作」を組み合わせた議論が，熱力学できたてほやほやの19世紀にマクスウェルによって提案されていた．マクスウェルは，「系のミクロ自由度を観察し，その結果を踏まえてピストン操作をすることを許せば，エントロピー増大の法則が破綻する」ことを示した．ここで重要なのは，ミクロな自由度に応じた操作に，ミクロな力学状態のデータを操作者に渡す通信が含まれていることである．ここに，**熱力学と情報理論の接点**がある．この接点については20世紀に渡ってゆっくりと議論されてきたが，一般性の高い美しい形で統合されたのは21世紀に入ってからである[10]．この表現の有用性や可能性は現在真摯に検討されている．

また，平衡状態で定義されるエントロピーを**非平衡状態に拡張**しようとする試みも20世紀に渡ってゆっくりと議論されてきた．特に21世紀に入ってしっかりした議論がされるようになってきたが，これはなかなかに手ごわい．特に，エントロピーの3つの表現に対応する拡張をすべて満たそうとすると一般性が失われるし，2つだけ満たそうとしても制約が必要になる[11]．一つだけ満たす拡張というのはそれほど意味がない．例えば，(5)式を非平衡系に拡張するのは自明にできるが，そのエントロピーが熱と関係したり，操作限界と関係したりするかどうかが問題である．

熱力学と関係なさそうなところでエントロピー

*7)　ある時刻で平衡状態にあるとして等重率の原理を仮定したとしても，力学は決定論的に時間発展しているので，操作をした後の力学状態が等重率の原理に従う理由はない．ダイナミクスに関わる問題を統計力学を踏まえて議論する際には，等重率の原理は一度しか使えない．このことを踏まえて熱力学第2法則をミクロから理解するのはまだ十分ではない．

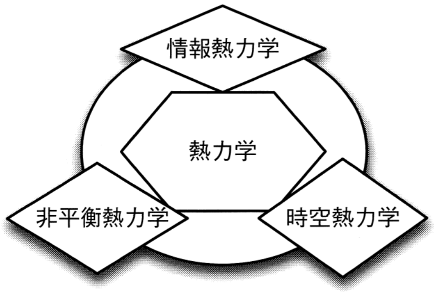


図3　熱力学の展開を示す概念図.

があらわれる例として古くから知られているのが「ブラックホール熱力学」である[12]. ブラックホールにおける質量変化の公式とブラックホールの表面積増大則がそれぞれ熱力学第1法則と第2法則とみなされた. さらに, 曲がった空間の場の理論を考えるとブラックホールはある温度の黒体のように見える. この黒体の温度とエントロピーを求めると, 熱力学と定量的に整合している. その意味でブラックホール熱力学は単なる形式以上のものがあると思われるが, その真の姿は現在も模索されている. 情報と熱力学が美しく統合されたように, 時空と熱力学が思いもよらない形で融合することはあるのだろうか. 以上のように熱力学が発展する様子を示したのが図3である.

6. エピローグ

筆者が学生のとき, タイプI熱力学から入ったが, なかなか理解できずタイプII熱力学に方針変更した. タイプII熱力学はすっきりする反面気持ちよくならず, タイプIII熱力学でとりあえず納得した. 熱力学の講義をするようになって, タイプI熱力学の理解が少しずつ進み, タイプII熱力学の操作限界に関する論文の影響でタイプII熱力学の理解が大幅に進展した. タイプI熱力学が腑に落ちるようになったのは40歳を超えたあたりかもしれない. それを踏まえてタイプIII熱力学に戻ることで, 統計力学の凄さをやっと実感できたかもしれない. ちょうど, エントロピーの非平衡への拡張に関する研究に没頭している頃だった.

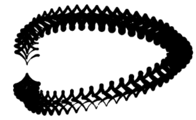
ある科学の体系について, 例えば, 演習問題を解けるようにするなら「何でも一つ」筋を通していればよいのかもしれない. しかし, 学問の醍醐味の一つは, いろいろなところから切ってみられることにある. 熱力学は大学の早い段階で学ぶ科目だが, その醍醐味が強く表れた学問である. そのために, 他の初等物理学科目よりずっと難しく感じるかもしれない. それでも3タイプの熱力学があることを意識した上で, さらにそれらを俯瞰的に捉えることが難しいと分かった上で, 自分の目前にある教科書を読み進めると随分と風景が変わると思う.

参考文献

1) 田崎晴明,『熱力学—現代的な視点から』(培風館, 2000).
2) 清水明,『熱力学の基礎』(東京大学出版会, 2007).
3) 佐々真一,『熱力学入門』(共立出版, 2000).
4) 佐々真一, 熱力学の基礎概念〜エントロピーをめぐって〜, 数理科学特集/物理的思考法のすすめ：諸分野におけるキーポイント, 2008年7月号 (サイエンス社).
5) 佐々真一, 熱力学〜エントロピーをつくる〜, 数理科学特集/面白い発想 [物理編]: 物理的思考のためのヒントを探る, 2012年6月号 (サイエンス社).
6) H.B. キャレン,『熱力学および統計物理入門』(吉岡書店, 1998).
7) E.H. Lieb and J. Yngvason, The physics and mathematics of the second law of thermodynamics, *Phys. Rep.* **310**, 1–96 (1999); arXiv:cond-mat/9708200.
8) M. Mezard and A. Montanari, *Information, Physics, and Computation*, (Oxford University press, 2009).
9) H. Tasaki *Statistical mechanical derivation of the second law of thermodynamics*, arXiv:cond-mat/0009206.
10) 沙川貴大, 上田正仁, 微小力学系における情報熱力学, 日本物理学会誌 **68**, 628 (2011); ci.nii.ac.jp/naid/110008762008.
11) S. Sasa, Possible extended forms of thermodynamic entropy (STATPHYS25 special issue への寄与として JSTAT から出版予定); arXiv:1309.7131.
12) 数理科学特集/時空と熱力学：ブラックホール熱力学の多彩な広がり, 2011年10月号 (サイエンス社).

(ささ・しんいち, 京都大学大学院理学研究科)

超伝導のマクロな見方とミクロな見方



加藤　雄介

1. はじめに

「もの」には電気を通すものと通さないものがある．磁石になるもの，磁石にはならないけれど吸い寄せられるもの，反発するものがある．これらの「ものの性質」を**物性**という．量子力学，電磁気学，熱力学，統計力学の基礎法則を用いて，ものの性質を調べるのが**物性物理**である．本記事では物性物理における物理現象の例として**超伝導**を取り上げ，現象を複数の視点から眺めることの面白さを伝えたい．

2. 超伝導状態

超伝導とは金属が低温で示す現象または性質——電気抵抗（オームの法則の R）がゼロとなる，磁石を近づけても超伝導状態の物体内に磁力線が入らない（**マイスナー効果**）など——を意味する．

超伝導状態にある物質の中では「多くの電子が対をなし，そのうち多くの対が共通の一つの量子状態にある状態」にある．まずこのことを以下で説明しよう．電子に限らず，粒子の状態は量子力学では**波動関数**で指定される．例えば**スピン角運動量**などの内部自由度を持たない一つの粒子の状態は位置 $\boldsymbol{r}$ の関数 $\Psi(\boldsymbol{r})$ で表される．二粒子系の状態は二つの位置変数 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ の関数 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ で表される．N 粒子系であれば，変数の数も増えて波動関数は N 変数関数 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$ となる．粒子数 N はアボガドロ数程度（$\sim 10^{23}$）になることが多く，それほどの多変数関数ではなかなか想像しにくいものである．

さて多粒子量子系では低温において多数の粒子が一つの量子状態にあるという状況がしばしば起きる．例えば，内部自由度を持たず，かつ互いに相互作用しない多粒子系では基底状態の波動関数はある一変数関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ を用いて

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) = \phi(\boldsymbol{r}_1) \cdots \phi(\boldsymbol{r}_N) \tag{1}$$

と表される．この状態はすべての粒子が一つの一粒子状態（一粒子波動関数）ϕ にある（“凝縮” している）とみなすことができる．このような状態を**ボース・アインシュタイン凝縮**した状態という．凝縮という語は気体に圧力をかけて液化するときにも用いられるが，より一般に何かが一点に集まる，集中するという意味で用いる．ここで凝縮しているのは，各粒子の状態である．あるいは，ばらばらな状態にいた各粒子が一つの一粒子状態に “凝縮” するという意味で用いている．

ボース・アインシュタイン凝縮は，粒子が互いに相互作用する場合にも起こり得る．その場合の波動関数は (1) の形に書かれるわけではない．凝縮が起こっているかどうかは**場の演算子** $\hat{\psi}(\boldsymbol{r})$ の基底状態 $|\mathrm{g}, N\rangle$, $|\mathrm{g}, N-1\rangle$ の間の行列要素

$$\langle \mathrm{g}, N-1 | \hat{\psi}(\boldsymbol{r}) | \mathrm{g}, N \rangle \equiv F(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

が熱力学極限（粒子数密度を一定に保ったまま，体積または全粒子数を無限大にとる極限）で残るかどうかで判定するのがより一般的な定義である．(1) を基底状態波動関数とする，相互作用しない粒子系の場合には，$F(\boldsymbol{r}) \propto \phi(\boldsymbol{r})$ となることも確認できる．$F(\boldsymbol{r})$ を**凝縮体波動関数（マクロ波動関数）**といい，これがボース・アインシュタイン凝縮状態を特徴づける物理量となる．ボース・アインシュタイン凝縮は粒子が内部自由度を持つ場合でも，スピン角運動量の大きさが整数値をとるものであれば起こり得る．そのような粒子のことを**ボソン**という．

ところで電子はスピン角運動量の大きさが 1/2 であ

り，ボソンではない（スピン角運動量の大きさが半奇数値である粒子を**フェルミオン**という）．したがってそのままではボース・アインシュタイン凝縮することはできない．ただし電子が二つ集まった状態は，**角運動量の合成**により，スピンが0または1の状態，あるいはそれらの重ね合わせの状態になるので，ペアを作ると凝縮できそうである．電子の位置座標（空間座標）$\boldsymbol{r}$ とスピン座標 σ をまとめて $x=(\boldsymbol{r},\sigma)$ と書く．ペアをなす二電子状態を $\phi(x_1,x_2)$ と置いて，(1) に倣ってペアを作って凝縮する状態を

$$\Psi(x_1,\cdots,x_N)=\phi(x_1,x_2)\cdots\phi(x_{N-1},x_N) \quad (3)$$

と置いてみる．このままだとフェルミオンの波動関数が満たすべき反対称性（任意の二変数を入れ替えると波動関数は符号を変える）を満たさないので，これを改良して

$$\Psi(x_1,\cdots,x_N) = \sum_P (-1)^P \phi(x_{p(1)},x_{p(2)})\cdots\phi(x_{p(N-1)},x_{p(N)}) \quad (4)$$

とする．$P=(p(1),\cdots,p(N))$ についての和は $(1,2,\cdots,N)$ の並べ替えについてとるものとし，$(-1)^P$ は P が偶置換のとき 1，奇置換のとき -1 とする．

(2) に倣って，対凝縮体波動関数（マクロ波動関数）を

$$\langle \mathrm{g}, N-2|\hat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{r})\hat{\psi}_\beta(\boldsymbol{r}')|\mathrm{g},N\rangle \equiv F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \quad (5)$$

と定義すると，この量は超伝導状態では有限の値をとり，そうでない状態（例えば自由電子系の基底状態）ではゼロになる．その意味で (5) は超伝導状態に対する**秩序変数**とみなせる．そしてこの節の初めのほうで述べた「　」部分の内容は次のように言い替えることができる．

「超伝導状態では多電子系の波動関数は (4) のような形で与えられ，その凝縮状態の性質は (5) で特徴づけられる．」

3. 超伝導の二つの見方

「超伝導状態の性質はマクロな波動関数で特徴づけられる」とした巨視的理論（**GL 理論**）を発表したのは Ginzburg と Landau である（1950）．前節では微視的理論ができてからマクロ波動関数が導かれたように書いたが，歴史的順序は逆で，Bardeen, Cooper, Schrieffer により，多電子系における対凝縮状態をもとにした微視的理論（**BCS 理論**）が発表された（1957）のは GL 理論が出されてから数年たった後である．GL 理論と BCS 理論の関係は Gor'kov によって明らかにされた（1958）．

以下では**磁束の量子化**という現象（次節で説明）をマクロな見方（マクロ波動関数を用いる説明）とミクロな見方（ミクロな多粒子波動関数を用いる説明）で眺めることにする．

4. 磁束の量子化（実験結果）

中空円筒の超伝導物体を用意する．その肉厚は**磁場侵入長** λ より厚いものとする．はじめ温度を高くしておけば常伝導状態になる．この状態で，円筒軸方向に外部磁場をかけると（図 1 左），小さな反磁性や常磁性効果を無視すれば，磁場は一様にかかる．次に温度を十分下げて超伝導状態にするとマイスナー効果により，超伝導体内から磁場は排除されるが，外部磁場の強さに依存した磁場が中空部分に取り残される（図 1 右）．中空部分に捕らえられた磁場を面積分した磁束 Φ は，$h/(2e)$（h はプランク定数，$e(>0)$ は電気素量）を単位にして量子化される．1961 年に Deaver–Fairbank, Doll–Näbauer によって見出された現象である[1,2]．

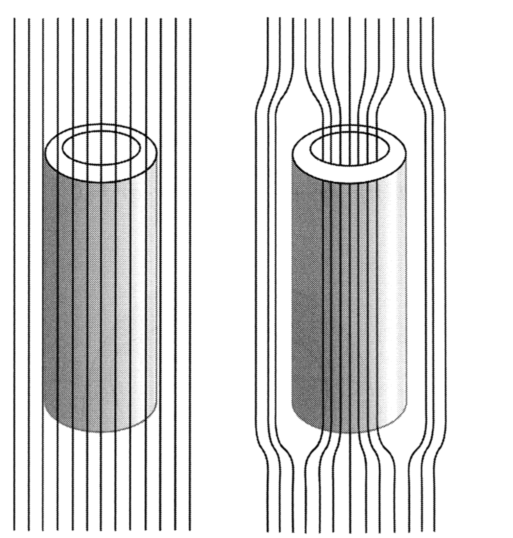


図 1　磁束の量子化の実験の模式図．左が常伝導状態，右が超伝導状態を表す．ともに直線，曲線は磁力線を表す．

5. 磁束の量子化：マクロ波動関数による説明

まずはマクロ波動関数によって磁束の量子化を説明しよう．マクロ波動関数を用いた理論では，超伝導状態の性質を特徴づけるマクロ波動関数として 2 節で導入した対凝縮波動関数 $F_{\uparrow\downarrow}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})$ に比例した波動関数を $\varPsi(\boldsymbol{r})$ と置く（Ψ とは区別して用いている）．これは電子対が凝縮した状態を記述するので，電荷 $-2e$ を持った荷電粒子のように振る舞う．それに対応して超伝導に寄与する電荷密度と電流密度はそれぞれ $-2e|\varPsi(\boldsymbol{r})|^2$,

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{i}e\hbar}{2m}\left(\varPsi^*\nabla\varPsi - \varPsi\nabla\varPsi^*\right) - \frac{2e^2}{m}|\varPsi|^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

と表される．ここで m は電子の質量，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである．多粒子系の物理量が，このように一粒子の量子力学のように表されるところがマクロ波動関数と呼ばれる所以である．$\varPsi(\boldsymbol{r})$ を振幅と位相で $|\varPsi(\boldsymbol{r})|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta(\boldsymbol{r})}$ と表すと，

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = -\frac{e\hbar|\varPsi(\boldsymbol{r})|^2}{m}\left(\nabla\vartheta(\boldsymbol{r}) + \frac{2e}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right) \quad (6)$$

と書けるので，電荷 $-2e$ を持っていることがよりはっきりするだろう．図 2 は円筒形状の超伝導体を磁場の方向から眺めた平面図である．超伝導体において内側の表面から距離 λ 程度までの領域は磁場が侵入し，電流が流れている領域である．そこから離れて超伝導体内部に十分入り込めば，マイスナー効果により磁場も電流密度もゼロである．その領域内の閉曲線を $\mathcal{C}$ として中空部分を囲むものをとる．この曲線上では (6) より

$$\nabla\vartheta(\boldsymbol{r}) + \frac{2e}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0. \quad (7)$$

これを $\mathcal{C}$ に沿って一周線積分した結果

$$\oint_{\mathcal{C}}\nabla\vartheta(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \frac{2e}{\hbar}\oint_{\mathcal{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \quad (8)$$

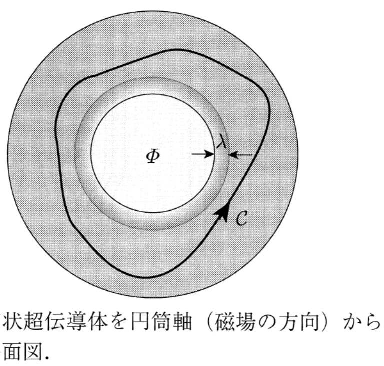


図 2　円筒状超伝導体を円筒軸（磁場の方向）から見た平面図.

における左辺第一項は 2π の整数倍，左辺第二項はストークスの定理から $\frac{2e}{\hbar}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{2e\varPhi}{\hbar}$ となる（S は $\mathcal{C}$ を縁とする面）．これから，直ちに $\varPhi$ が $\frac{h}{2e}$ を単位として量子化されることが導かれる．

6. 中空領域を磁束が貫く円筒物体内の一粒子状態

超伝導体には磁場がかかっていないのに，物質の外側（中空領域）の磁束の値に注文を付けるとは不思議な話に聞こえるかもしれないが，一粒子量子力学の場合にもこのような現象は**アハラノフ・ボーム効果**として知られている．物体が多重連結であるとき，物体が取り囲む領域（今の場合は中空領域）の磁場がベクトルポテンシャルを通して波動関数に影響を与える．以下のように一体のシュレーディンガー方程式を解いてみると，物体に磁場がかかっていないのに物体が取り囲む領域にある磁束からエネルギースペクトルが影響を受けることがわかる．むしろ，物体が取り囲む領域に磁束が入っているのにその影響が見られない場合のほうが特殊である．

中空領域にのみ磁場が存在しその領域の磁束が $\varPhi$ であるときの一粒子状態を量子力学で考えよう．磁場は

$$\boldsymbol{r} \in \text{円筒領域}, \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\varPhi}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta \quad (9)$$

ととると円筒領域では $\nabla\times\boldsymbol{A} = 0$ となり，この領域には磁場がないことを表す（$\boldsymbol{e}_\theta$ は円筒座標 (r,θ,z) の θ 方向の単位ベクトル）．また中空領域を一周する経路 $\mathcal{C}$ を円筒領域内にとり，$\oint_{\mathcal{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ に (9) を代入すると前節と同様に $\varPhi$ となり，たしかに (9) は中空領域に存在する磁束 $\varPhi$ に対応するベクトルポテンシャルであることがわかる．ハミルトニアン

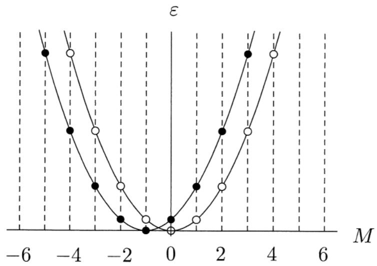
$$\hat{\mathcal{H}}_\varphi = \frac{(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}}))^2}{2m} \quad (10)$$

は円筒座標表示を用いて

$$\hat{\mathcal{H}}_\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\varphi\right)^2\right] \quad (11)$$

と表される．ここで $\varphi = \frac{e\varPhi}{h}$ と置いた（無次元実数）．

まずここで単純化して細いリングを考えて感触をつかんでから次の段落で元の問題に戻ることにしよう．肉厚も薄く，かつ z 方向にも薄い（半径 r の）リング状の物体を考えるとハミルトニアン (11) は



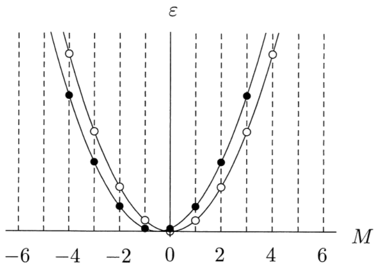


図 3　細いリングの一電子状態のエネルギー．上図は $\varphi=0$ のとき（白い丸）と $\varphi=1$ のとき（黒い丸）．下図は $\varphi=0$ のとき（白い丸）と $\varphi=1/2$ のとき（黒い丸）．

$$\hat{\mathcal{H}}_\varphi \to -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathrm{i}\varphi\right)^2 \tag{12}$$

となり，エネルギー固有関数は $\Psi_M(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}M\theta}$, そのエネルギー固有値は $\varepsilon_M=\frac{\hbar^2(M+\varphi)^2}{2mr^2}$ で与えられる（M は整数）．$\varphi=0,1/2,1$ の場合のエネルギー固有値を図 3 に示した．上図を見ると，$\varphi=1$ のエネルギー固有値（黒い丸）は $\varphi=0$ のそれら（白い丸）と同じ値をとる．今の場合 $\varphi=0$ のときの $\Psi_M(\theta)$ と $\varphi=n$（整数）のときの $\Psi_{M-n}(\theta)(=\Psi_M(\theta)\mathrm{e}^{-in\theta})$ は同じエネルギーを持つ．一方図 3 下図をみると $\varphi=1/2$ のエネルギー固有値（黒い丸）は $\varphi=0$ のそれら（白い丸）と同じ値にはなっていない．一粒子レベルで見ると φ が整数のときのみ $\varphi=0$ のときとのエネルギー固有値の同等性が見て取れる．

さて元の問題に戻って肉厚が有限の中空円筒物体においても同様なことが言える．すなわち

> $\varphi(=\frac{e\Phi}{h})=0$（磁束なし）のときの $\Psi(r,z,\theta)$ のエネルギー期待値と $\varphi=n$（整数）のときの $\Psi(r,z,\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}$ のエネルギー期待値は等しい．

これを踏まえて，磁束の量子化の説明に戻ろう．

7. 磁束の量子化：ミクロな見方に基づく説明

7.1 $\boldsymbol{\Phi}=\frac{h}{e}\times$ 整数 (?)

前節の結果は互いに相互作用する多粒子系にもすぐに拡張できる．j 番目の粒子の空間座標，スピン座標を $\boldsymbol{r}_j(r_j,z_j,\theta_j)$, σ_j として

> $\varphi(=\frac{e\Phi}{h})=0$（磁束なし）のときの
>
> $\Psi(\boldsymbol{r}_1,\sigma_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N,\sigma_N)$
>
> のエネルギー期待値と $\varphi=n$（整数）のときの $\tilde{\Psi}=\Psi\mathrm{e}^{-in\sum_j\theta_j}$ のエネルギー期待値は等しい．

このことから次のようなことが予想されるかもしれない．

> $\varphi(\neq 0)$ のとき，ベクトルポテンシャルが超伝導体内に入るので，一般には，$\varphi=0$ のときに比べてエネルギーが上がってしまう（すなわち超伝導状態が壊れてしまう）．例外的に，$\varphi=n$（整数）のときは $\varphi=0$ のときと同じエネルギーを持つ状態ができる*1)．

この予想から自然に導かれる結論は $\varphi=n$ すなわち $\Phi=nh/e$ である．この議論は「超伝導はベクトルポテンシャルを嫌う」という仮定と位相変換（特異ゲージ変換）だけに基づくものであり，かつ磁束の量子化現象を実験に先立つこと 11 年前に予言したという意味で重要である（London, 1950）[3]．ただし，実験で観測されたように Φ が h/e の整数倍のときだけではなく h/e の半奇数倍の場合も実現する理由を説明するためには超伝導状態の多粒子波動関数（BCS 波動関数）の構造に立ち入ってみる必要がある．その説明は 1961 年，Byers と Yang によってなされた[4]．

7.2 $\boldsymbol{\Phi}=\frac{h}{2e}\times$ 整数(!)[5]

超伝導状態の多電子状態は，波動関数よりも第二量子化表示を用いた状態ベクトルで表すほうが便利である．全粒子数 N が偶数であるとき，超伝導状態 (4) は典型的な超伝導体で空間的に一様な場合には

$$\left(\sum_{\boldsymbol{k}} g_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\right)^{\frac{N}{2}}|0\rangle \tag{13}$$

*1)　$\varphi\neq n$ のとき，そのまま超伝導を壊すより，中空領域との境界付近に超伝導電流が流れて，超伝導電流による磁束と外部磁場による磁束を合わせて φ が整数となるようにしたほうがエネルギー的に安定な状態になる．

と表される．$\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ は波数 $\boldsymbol{k}$ とスピン $\sigma(=\uparrow,\downarrow)$ で指定される平面波一電子状態に対する消滅演算子，$|0\rangle$ は真空の状態ベクトルを表す．(13) は一粒子状態 $(\boldsymbol{k},\uparrow)$, $(-\boldsymbol{k},\downarrow)$ にある電子が対をなして凝縮していることを表している．この状態がエネルギー的に安定であるためには，電子間に引力相互作用が働き，その相互作用によるエネルギー利得を稼ぐことがポイントとなっている．そのために

[1] すべての対の重心運動量が等しいこと，
[2] 対をなす電子の一粒子状態のエネルギーは等しいこと，

の二点が要となっている．

(13) に対応する中空円筒系の超伝導体の状態ベクトルを書くために生成消滅演算子のラベル（一粒子状態）を定める．一粒子ハミルトニアン (11) に対して z 方向の並進対称性，θ 方向の回転対称性を用いると，エネルギー固有状態は動径方向の量子数 n_r，z 方向の波数 k_z，角運動量の z 成分（を $\hbar$ で割ったもの）M（整数）の量子数のセットで指定され，

$$\Psi_{n_r,k_z,M}(r,z,\theta)=R_{n_r,M}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}M\theta} \tag{14}$$

の形で与えられる．以下 n_r と k_z をまとめて K と書くことにして，これにスピンまで考慮した一電子状態に対する消滅演算子を $\hat{a}_{K,M,\sigma}$ と表す（$\sigma=\uparrow,\downarrow$ はスピン一粒子状態を表す）．これを用いると中空円筒系の超伝導状態は

$$\left(\sum_{K,M} g_{K,M}\hat{a}^\dagger_{K,M,\uparrow}\hat{a}^\dagger_{\bar{K},-M,\downarrow}\right)^{\frac{N}{2}}|0\rangle \tag{15}$$

と書くことができる．ここで $\bar{K}=(n_r,-k_z)$ とし，$(K,M,\uparrow)$ と $(\bar{K},-M,\downarrow)$ は時間反転操作で結ばれている一電子状態を表す．先の超伝導状態 (13) がエネルギー的に安定である条件 [1][2] に対応して，状態 (15) は

[1]′ すべての対の重心角運動量が等しいこと，
[2]′ 対をなす電子の一粒子状態のエネルギーは等しいこと，

の二つの条件を満たしている．

状態 (15) に対する位相変換を考えよう．一般に状態ベクトル

$$\left(\prod_{j=1}^{N}\hat{a}^\dagger_{K_j,M_j,\sigma_j}\right)|0\rangle \tag{16}$$

に対する波動関数を $\Psi(\boldsymbol{r}_1,\sigma_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N,\sigma_N)$ としたとき，これに位相変換をほどこした波動関数 $\tilde{\Psi}=\Psi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\sum_{j=1}^{N}\theta_j}$ に対する状態ベクトルは

$$\left(\prod_{j=1}^{N}\hat{a}^\dagger_{K_j,M_j-n,\sigma_j}\right)|0\rangle \tag{17}$$

で与えられる．これを用いて 7.1 の議論を表すと次のようになる．

「<u>$\varphi=n$（整数のとき）</u>，状態

$$\left(\sum_{K,M'} g_{K,M'}\hat{a}^\dagger_{K,M'-\varphi,\uparrow}\hat{a}^\dagger_{\bar{K},-M'-\varphi,\downarrow}\right)^{\frac{N}{2}}|0\rangle \tag{18}$$

のエネルギー期待値は $\varphi=0$ のときの状態 (15) のエネルギー期待値 E_0 に等しい．」

それに対して Byers と Yang は次のことを指摘した．

「状態 (18) のエネルギー期待値は $\varphi=0$ のときの状態 (15) のエネルギー期待値 E_0 と同程度のエネルギーである．ただし一粒子状態に関する境界条件から <u>$M'-\varphi$, $-M'-\varphi$ ともに整数のときのみ</u>状態 (18) は物理的な状態として許される．」

これまでにも位相変換と一粒子状態の境界条件については考慮してきたので，この指摘から新しいことが出てくるのかと思う人もいるかもしれないとは思いつつ，とりあえず下線部に注目して，

$$M'-\varphi=N_1,\quad -M'-\varphi=N_2 \tag{19}$$

と置き（N_1,N_2 は整数），M' を消去すると

$$\varphi=\frac{1}{2}\times\text{整数}, \tag{20}$$

すなわち $\Phi=\frac{h}{2e}\times$ 整数 という条件がでてくる (!)．φ が整数のときは M' が整数のときであり，これは 7.1 で既に予想された状態である．問題は φ が半奇数の場合で，これは M' が半奇数の状態である．どうして見落とされたのだろうか．そのあたりの事情をさぐるために，φ が整数の場合と半奇数の場合についてペアリングの様子を比較することにしよう．図 4 上図は $\varphi=1$ のときの一粒子状態を表しており（図 3 上図に対応），ペアを作る電子の状態を矢印で結んでいる．これは $\varphi=0$ のときのペアリングの状況を角運動量軸（横軸）に沿ってシフトしただけである．これに対

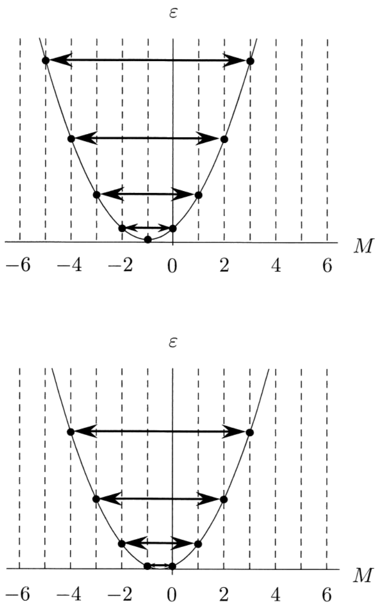


図 4　細いリングにおけるペアリングの様子．上図 $\varphi = 1$ のときと下図 $\varphi = 1/2$ のとき．水平の矢印で対応づけられている電子がペアを組む（スピンは図示していない）．

して，図 4 下図は $\varphi = 1/2$ のときの一粒子状態を表している．この場合は図 3 下図で見たように，一粒子状態は $\varphi = 0$ の状態とは異なるエネルギー固有値を持つ．しかし，先の [1]′ [2]′ より超伝導状態が安定になる条件を満たしている．超伝導体が安定に存在するためには，$\varphi = 0$ のときと厳密にエネルギーの等しい状態が実現する必要はなく，一粒子状態のエネルギー準位が磁束によって影響を受けて変わってしまったとしても，要はペアを作ってエネルギー的に得になる二つの条件が満たされていればよいということになる．

8. 二通りの見方で眺める意義

磁束の量子化に関して二通りの見方（説明）を紹介してきた．両者を比べると，マクロ波動関数を使った説明は，短くすっきりしていて，マクロ波動関数の存在こそ超伝導の本質であることが実感できる．ただあまりにすっきりしていて物足りないというと科学的ではないだろうけれど，「$2e$ の電荷を持つ粒子のマクロな波動関数で超伝導状態が記述される」というところから話を始めると，そのスタートが，ゴール（磁束が $h/(2e)$ で量子化されるという事実）にあまりに近すぎるように思える．そのために少し説明は長くなるが，電荷 e を持つ電子から話を始めた前節のほうが，結果の非自明さも感じ取れるし，超伝導状態がどのようにして磁束の影響をかいくぐってエネルギー的に安定になるのか，そのからくりを再確認できるメリットもある．

物性物理の分野では，問題が厳密に解ける場合は少ないので，本質を絞り込んだといっても物理的解釈も近似的なものであることが多い．また実験結果が先に出て後から説明する場合もあって，いろんな角度からの説明を提示することで，初めて説得的に受け入れられることもあるだろう．本号のテーマを見て，思い浮かんだのが磁束の量子化である．ここで述べた二通りの説明を学んで筆者自身が初めて腑に落ちた気になったことを思い出し，本記事を執筆した．

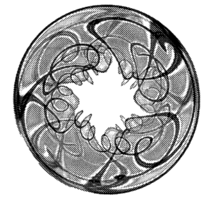
参考文献

1) B.S. Deaver and W.M. Fairbank, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 43 (1961).
2) R. Doll and M. Näbauer, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 51 (1961).
3) F. London, *Superfluids* (John Wiley and Sons, Inc., New York 1950) Vol.I, 152.
4) N. Byers and C.N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 46 (1961).
5) ここで紹介した説明は J.R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity* (Addison-Wesley, New York, 1983) に基づいている．

（かとう・ゆうすけ，東京大学大学院総合文化研究科）

一般相対性理論の幾何学的見方と非幾何学的見方

アインシュタインとの夢対話



米谷　民明

読者には，一般相対性理論はアインシュタインがニュートンの理論を乗り越え，重力を時空の幾何学と結びつけて構築したことは知っているが，（筆者に与えられた）表題の「非幾何学的見方」とは何なの，という方が多いだろう．これはアインシュタインが生涯に渡って悩み続けた相対論と量子論を隔てる深い溝と関係し，掘り下げようによっては，両者の統一という理論物理学の最先端の課題に繋がる．教科書的な解説は止め，筆者の夢に出てきたアインシュタイン（A）と筆者の分身らしきTとの架空の対話としてみた．

夢対話第1日

[Tが建物に着き，入り口の赤色の**E**のオブジェが目に映った瞬間，一人の長髪の高齢の老人がすっーと入っていったようだ．ベルリン近郊のポツダム，アインシュタイン研究所の一室らしい．柔和なまなざしのAが微笑を浮かべてTを待っていた．]

T：驚きました．先生とお話ができるなんて夢のようです．先生が世を去られたとき（1955年）私は8歳になったばかりだったことになりますが，少年時代から物理学に興味を持ち先生へ憧れるようになりました．先生の書きものに最初に接したのは高校生のときで「相対論の意味」という本でした．それが理論物理に進む動機になったのです．大学院時代からは，一介の理論物理学者として仕事をしてきましたが，先生が長らく取り組まれた量子論と，先生の最大の業績と言える一般相対性理論の関係に関する一種の偶然と言えるような初期のある発見が私の後の研究者人生を決定づけました．

A：君ははるばる日本からやって来たのだね．日本を訪問したときのことが頭に浮かんできたよ．私はそのとき40代だった．そして，10年ほど後，ベルリンからアメリカに渡って以来，ドイツの地は一度も踏んでいないが，今日は気がついたらベルリン時代の別荘に近いここポツダムにいる．こうして思いがけなく君と対話する機会を持つとは．

T：私も先生がアメリカに渡られた頃の年齢を随分と越してしまいましたが，先生とは一度お会いし，お話したいものだと以前から願ってきました．

先生は1905年，26歳のとき，その後の物理学の発展の礎になった革命的な仕事を3つ成し遂げられました．最初に発表されたのが光の量子論で，ブラウン運動の理論，特殊相対性理論と続きます．このうち，一般相対性理論に向けては，特殊相対性理論の論文「運動物体の電気力学について」が最初の出発点ですね．

A：スイス，ベルン時代の仕事だね．100年以上も前のことでだいぶ忘れてしまった．

T：ベルンは，私も30年前ジュネーブのCERN研究所にいた頃何度か訪れ，先生がご家族で下宿していた家（今は記念館）にも行きました．特殊相対性理論の論文では，空間の長さや面積などの性質についてはユークリッドの幾何学を前提とした上で，光信号を用いて時間の定義がどうあるべ

きかを深く分析し，時間の同時性が本質的に運動に依存することを明らかにしました．その結果として，慣性系どうしの時空間座標の関係がいわゆるローレンツ変換であることを導きました．

A：当時，私には電磁場理論を正しく理解するには，時間と空間の概念自体をその土台から考え直すことが絶対に必要だと思えた．この論文で電磁場を記述する基準系として慣性系だけを扱う範囲では，ほぼ満足のいく解決ができた．そして，ミンコフスキーが提唱した4次元時空の表し方により，さらに幾何学的にも整理された．

T：先生はスイス連邦工科大学（ETH）に在学中，ミンコフスキー先生の授業を受けていたのですね．

A：学生時代はあまり熱心には講義に出席しなかったし，当時は数学がそれほど役立つとは思っていなかった．立派な数学者がいたのだが….

T：確かにミンコフスキーの仕事は重要です．4次元のミンコフスキー空間の座標 x^μ, $\mu = 1, 2, 3, 0$ でローレンツ変換は $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$ $(\eta_{\mu\nu} L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta})$ と表される．質量，そして，エネルギー，運動量など物理的に意味がある量は，ローレンツ変換のもとで不変であったり，ベクトルやテンソルとして変換する量であったりする．3次元のユークリッド幾何学での曲線の長さや図形の面積などがデカルト座標系の選び方によらずに同じ形式で表され，かつ座標回転で不変な量であると同じ意味で，4次元ミンコフスキー時空間の幾何学が定まるわけですね．マックスウェル方程式や荷電粒子の運動方程式が，ローレンツ変換で不変で，その意味で慣性系での物理法則が『幾何学的』に定式化されたと言えます．先生は特殊相対性理論を完成させた後，すぐに重力の問題に進まれたようですね．

A：重力こそ電磁力と並んで自然界を支配する力だからね．最初の手掛かりになった指針としての『等価原理』には1908年頃に思い当たったのだが，数学的に定式化するのにどうやったらよいか，4～5年ほど悩んだことが脳裏に残っている．

T：等価原理は，重力の作用は常に物体の質量に比例しあらゆる物体に同じ加速度を引き起こすため，局所的には（つまり，狭い領域に限れば）重力加速度を打ち消すような加速座標系に移ることにより消去できる．言い換えれば，重力と加速座標系への変換は相対的で絶対的な区別はできないという考えでした．この原理を定式化するにはリーマン幾何学が相応しいことを認識するのに，ETHでの同級生だったグロスマンの示唆があったという逸話が伝わっています．グロスマンとの共著の論文が一編ありますね．先生が物理学の部を担当し，彼が数学の部を担当したと明示してあります．

A：彼には他にも助けてもらったことがある．試験のときノートを借りたり，ベルンの特許局への就職でも世話になった．リーマン幾何学について彼が調べてくれたことは確かに役立った．

T：先生の博士論文（1905年）の扉ページにグロスマンへの献辞が載っていることから間柄が想像つきます．先生とグロスマンとの協力を記念する呼び名がついた「マルセル・グロスマン・ミーティング」という一般相対性理論と重力に関する大きな国際会議が数年おきに世界中回り持ちで開催されています．日本でも1991年に京都で開催されました．

A：ほー，私の盟友のことが今でもそんなふうに記憶されているとはうれしい限りだ．

T：グロスマンとの論文は，考え方としては，先生のベルリン時代の畢生の大論文「一般相対性理論の基礎」（1916年）にかなり近いところに達しています．時空の計量 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$，計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ が重力場として明確にされ，物質のエネルギー運動量分布を表すテンソル $T_{\mu\nu}$ と重力場との関係を支配する場の方程式に向けて考察されています．

A：だが，正しい場の方程式に到達するにはそれからさらに3年近くかかった．等価原理と一般共変性，つまり任意の座標系で物理法則は同じ形で表せるという2つの原理に基づいた確かなものに持っていくには，リーマン幾何学を再構築するところまで理解を深めることが必要だった．

T：「一般相対性理論の基礎」は，「運動物体の電気力学」と同じように，第1部の時間空間の原理的考察から始まります．第2部で場の方程式の構

築に必要なリーマン幾何学がほぼ完結した形で展開された後，第3部で重力場の方程式を導き，第4, 5, 6部では応用として流体や電磁場，ニュートン理論からのずれ，などを扱うという構成の50数ページほどの論文です．現在でも一般相対性理論を教えるのに手本になる完璧なものです．私は大学生になってこの論文に取り組んだときの，先生の偉大さをひしひしと感じつつ，わくわくしながら読んだ高揚感が忘れられません．相対論を教えたり解説するときには，いつも参考にしています．

この論文で確立された最も重大なことは，重力の力学が時空の幾何学でもある，つまり時空そのものの構造が，重力場以外の電磁場を含めた意味での物質の力学と絡み合って定まるのだという考えですね．これは特殊相対性理論が幾何学的に定式化できたというのとは一段階違う意味での物理学の幾何学化です．時空の幾何学が最初から定まっているのではなく，それ自体が力学変数になるというわけですから．この立場を便宜上今後**『幾何学的見方』**と呼ぶことにしましょう．

A：重力が時空の幾何学自体と不可分だというのは，回転座標系を考えればすぐ分かる．回転軸を中心とする円の周囲の長さと円の半径の関係はローレンツ収縮によりユークリッド幾何学からずれてしまうし，時間の進み方も場所に依存するのだから．

T：「相対論の意味」や，「一般相対性理論の基礎」の初めのほうでも強調されていますね．しかし，ポアンカレは現実の物体の性質を幾何学と直接結びつけることは意味がないと主張していたようですね．彼によれば，幾何学の公理 (G) と物理法則 (P) を合わせて初めて実際の現象 (G+P) が説明されるのであって，GとPを別々に経験に基づき定めることは不可能．例えば，幾何学を測定と結びつけるために通常仮定される剛体としてのものさし等は実際には存在しない．そして異なるGを採用しても，それにあわせて異なったPで経験が説明できるはずだから，別々に論じることは無意味だ．運動の収縮や時計の遅れに導くような別の力を仮定すればすむ．（少し誇張して言えば）経験により幾何学が決められるとするのは幻想であり，幾何学は単に約束にすぎない．物理学にとっての幾何学は，どの幾何学の公理を採用したら法則が最も単純になるか，GとPの組み合わせを追求しているだけだ….

A：それについては，私も昔論じたことがある．ポアンカレの考えはそれ自体としては間違いではないが，現在の物理学の発展段階では，それらは独立な概念として扱うべきだ．私たちの自然の理解は不完全で真の原理は分かっていないのだからね．

T：こう言ってよいですか．2つを分けて考えることにより，経験を理解するのに役立つような整合的な仮定を両方の意味で置きつつ経験と照らし合わせて確かめながら進む以外ない．ポアンカレの見解は無意味ではないにしても，物理学を進めるのに役立つのか疑問だと（A：軽くうなずく）．

私も先生がおっしゃる通りだと思います．しかし，ポアンカレの主張にも，考慮すべき重要な観点が含まれているような気がします．

ですが，もう，お疲れでしょう．今日はここで終えて，続きは明日に致しましょう．

夢対話第2日

A（微笑しつつ）：君が昨日強調したポアンカレの考えが気になるが，それが今日の話題かね．

T：関連はあります．こんな問はどうですか．「特殊相対性理論に基づく電磁場の理論は知っているとして，リーマン幾何学なしに一般相対性理論に到達できないか」，一種の**『非幾何学的見方』**ですね．

A：答えを知っていれば色々な説明ができるだろう．

T：ちょっと専門的かも知れませんが，対話を熱心に聞いている方たちのためにざっと説明しましょう．

A：そうだね．どういうことか私も聞きたい．

T：電磁場から始めます．電流ベクトル $j_\mu(x)$ を源とすると，結合する場はベクトル場 $A^\mu(x)$ が自然で，ラグランジアン密度 $j_\mu A^\mu$ の積分 $\int d^4x\, j_\mu A^\mu$ が作用積分の相互作用項です．電荷保存を表す $\partial_\mu j^\mu = 0$ を仮定すると，この項は任意のスカラー関数 $\lambda(x)$ による A_μ のゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda$ で不変です．この相互作用項により A_μ の場の方程式は A_μ とその微分で書ける表式 $L(A)_\mu$ があって $L(A)_\mu = j_\mu$ と表せる．保存

則と矛盾しないためには $\partial^\mu L(A)_\mu = 0$ が成り立ち，ゲージ変換でも不変でなければならない．この要請を微分階数が 2 までで満たすものは，A_μ について 1 次式では比例定数の不定さを除いて $L(A)_\mu = \partial^\nu F_{\mu\nu}, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と一意的に決まります．

こうしてマックスウェルの電磁場理論が自然に導かれますが，これを重力に拡張するなら，まず，電流ベクトルに代わって，質量分布を特殊相対論的に拡張した重力の源としての保存則 $\partial^\mu T^{(0)}_{\mu\nu} = 0$ を満たすエネルギー運動量テンソル $T^{(0)}_{\nu\mu}$ が出発点です．そうすると，重力場は対称テンソル場 $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ で，相互作用 $\int d^4x\, h^{\mu\nu} T^{(0)}_{\mu\nu}$ から保存則により，重力場のゲージ変換が決まります．

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu. \tag{1}$$

場の方程式を書き下すには $h_{\mu\nu}$ とその微分で表せて，ゲージ変換で不変であり，$L(h)_{\mu\nu}$ により

$$L(h)_{\mu\nu} = T^{(0)}_{\mu\nu} \tag{2}$$

と置けるような $L(h)_{\mu\nu}$ を求めればよい．微分について 2 階だとすると，比例定数を除き $L(h)_{\mu\nu}$ は一意的に定まります．式は長いので書きませんが，結果は一般相対性理論の重力場の方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{3}$$

で計量テンソルを $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ として $h_{\mu\nu}$ の最低次（左辺は 1 次，右辺は 0 次）という（線形）近似をしたものと一致する（G = 重力定数）．括弧内の数字で $h_{\mu\nu}$ の次数を示し，(2) ではエネルギー運動量テンソルに添字 $^{(0)}$ を付しました．(3) の左辺を $G_{\mu\nu}$ で表すと，$L(h)_{\mu\nu} = G^{(1)}_{\mu\nu}$ です．

しかし，ここから電磁場との重大な違いが生じます．電荷の保存則 $\partial^\mu j_\mu = 0$ は，電磁場が電気的に中性ですから電磁場が結合しているかどうかによらず，荷電粒子の運動方程式（あるいは物質場の運動方程式）が満たされていれば成り立つが，エネルギー運動量ではそうはいかない．相互作用項 $h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ により，必然的に物質と重力場との間でエネルギー運動量がやり取りされる，つまり，重力場自体もエネルギー運動量を持ち得るので，結合を取り入れると保存則 $\partial^\mu T^{(0)}_{\mu\nu} = 0$ はそのままの形では成り立たない．それにも拘らずゲージ不変性と保存則を保つには，最低次のゲージ変換，$G^{(1)}_{\mu\nu}, T^{(0)}_{\mu\nu}$ のいずれについても，また物質場の運動方程式についても，線形近似からの補正が必要になる．この補正は，$h_{\mu\nu}$ の冪級数の形に展開して各次数で整合性が保たれるように表式を決めていけばよい（$\sqrt{G}$ による展開と看做すこともできる）．場の方程式の微分階数が 2 という要請のもとでは，これからすべての次数で補正が定まり，結果は (3) を $h_{\mu\nu}$ で展開したのと一致するのです．

つまり，リーマン幾何学によらなくても，(3) と同じ結果を級数展開として構成できる．結果が幾何学的に解釈可能なのは，こうして求めたゲージ変換の形が，実は時空の座標の無限小変換

$$x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu(x) \tag{4}$$

に対応すると解釈できることによります．実際，物質場で成り立つ最低次の保存則 $\partial^\mu T^{(0)}_{\mu\nu} = 0$ は，変換 (4) で ϵ^μ が定数になる極限から導かれます．

これは対称性と保存則の関係についてのいわゆるネーターの定理の特別な場合です．しかし，一旦エネルギー運動量テンソルを源とする重力を導入するなら必然的に ϵ^μ が定数でないような一般座標変換の対称性へと拡大が起こるわけです．

A：実際にはもっと色々な仮定が必要だろう．微分が2階までというだけでなく，源のほうの物質場の性質や，それから重力定数以外に新たな定数が入ってこないという要請とか．級数が収束し閉じた形に書けるかについての保証もない．この議論はどの程度厳密に成り立つのかね．

T：ごもっともです．仮定を最小限にするには，物質場について重力以外には相互作用がない自由スカラー場だけを考えるのが便利です．また，技術的には，クリストッフェル記号，つまり $h_{\mu\nu}$ の1階微分，の共役に相当する場を独立自由度として導入して方程式を1階微分方程式に書き直してからこの議論を行うと見通しがよくなります．厳密さに関しても色々と議論されています．例えば，物質場との結合がないテンソル場 $h_{\mu\nu}$ だけという特殊な場合なら一般相対論とは異なる非線形理論も存在可能という主張もあります．

A：物質と無関係では意味がないね．いずれにしても，君が説明してくれたような理解も可能なのは分かる．リーマン幾何学が自然な数学的構造であることを反映していると言えるだろう．

T：始めからリーマン幾何学という高価な道具を持たなくても，いわば，手作業の代数的なやり方で一般相対性理論に到達できる．勿論，幾何学的立場が不要というのではありません．例えば，ブラックホールなどのような強い重力場で計量テンソルがミンコフスキー座標で見たとき特異性を持つようなところでは級数展開は破綻します．でも原理的には収束するところから座標を取り直して（つまり背景時空を取り直す）級数展開を行えばそのような場合も議論できます．

A：ブラックホール！？ まあ，それは置いておくとして，逆の意味だが，場の方程式を $\eta_{\mu\nu}$ から展開して調べる方法は私も重力波を論じるときに用いた．

T：ブラックホールという用語は先生の時代には使ってなかったんだ．重要ですが，この問題に入るとまた長くなるので踏み込みません．重力波については，すでに1916年に議論されてますね．

A：最初は間違いがあってね，一応の満足がゆく議論を与えたのは1918年だった．だが，重力場のエネルギーについてはしばらく論争があった．

T：重力場のエネルギーは座標の選び方に依存し，局所的に有意味には定義できないという問題ですね．先生が1918年に導いたエネルギー損失についての4重極公式に対して異論がありました．

A：重力波についても近似によらない厳密な取り扱いが望ましいが，円筒波で厳密解を見つけることができたのはアメリカに渡ってからだ．

T：1937年のローゼンとの論文ですね．1938年には，インフェルトとホフマンと一緒に場の方程式に基づいて，ニュートン近似からの速度 (v/c) による展開で運動の問題を論じた仕事があります．

A：1938年の方法で重力波も論じたかったのだが．

T：それは後に改良され，近似を進めてエネルギー損失について4重極公式と調和する結果が得られています．重力波はまだ直接検出できていませんが，間接的に2重星パルサーと呼ばれる天体のエネルギー損失の観測から証拠がありますし，今，日本も含め世界の何カ所かで直接検出へ向けた大規模な計画が進んでいます．

そろそろお疲れですね，また明日にしましょう．

夢対話最終日

T：先生はパウリに，重力場の方程式の左辺は大理石だが，右辺は（粗末な？）木だ，と述べたそうですね．

A：彼とはよく議論したからね．そういうことを言ったかも知れない．

T：幾何学的な立場からは，その意味はよく分かります．あるインタビューでは，自分の研究は理論物理学の統一と単純化を目指してきた．マクロな現象についてはこの目標をかなり達成したが，量子と原子の領域については成功できなかった，また，プランクメダルの受賞の際にも，自分の量子論の仕事はほとんど偶然の産物にすぎず，このような賞をもらうのは恥ずかしい，という意味のこ

とをおっしゃったそうですね．

A（苦渋の表情で）：私は量子論には相対論よりはるかに長い時間をかけて取り組んだ．だが，拠り所にすべき原理にはどうしても到達できなかった．

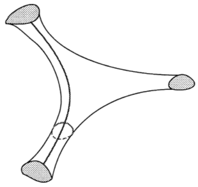
T：私は，本当は前から量子論について先生に伺いたかったのです．1905年の光の量子論から始まり，先生は量子力学へ向けて最重要な数々のステップを創始されました．例えば，1917年の論文のプランク公式の新しい導出では，後の行列の概念にもつながる遷移確率の概念が導入されていますね．量子力学成立以前に確率の概念を最も巧みに展開し発展させたのは他ならぬ先生です．

A：私が量子論における確率の役割について危惧の予感を持ち始めたのも，実は1917年頃からだ．ミクロの世界に確率の概念が有用なことは確かだよ．だが，現在の量子力学のように物理的実在が確率でしか記述できず観測した後でしか定まらないとは，私にはどうしても信じられないのだ．

T：それが量子力学の『不完全性』を主張したポドルスキー，ローゼンとの論文（1935年）につながったのですね．先生は重力と量子論をどう調和させようと考えていらっしゃったのでしょうか．量子力学に基づく発展により，自然界のミクロな成り立ちを説明するには，重力と電磁力以外の力（『強い力』と『弱い力』）が必要なことが，1930年代に始まった進展により確かになりました．でも先生がこういう方面の発展について何か語ったというのは聞いたことがありません．

A：プリンストン時代，大半の若い物理学者にとって私は一種の記念物のようなものだったろう．私は自分の信念に従い自分のやり方を貫き，私なりの幾何学的な『統一』を目指しただけなのだが….

T：私は先生の統一理論の論文もいくつか読みました．正直言って幾何学的見方に囚われすぎていると感じました．失礼をお許しください．私は重力と他の力の統一，同じことですが，一般相対論と量子論の統一を成し遂げるには，前者の幾何学的立場は一時的に棚上げし，先生の言う『木』側の立場を取ってみるのが，現在の物理学の発展段階としては重要だと考えています．というのは，電磁力と同じように強い力も弱い力も昨日議論した考え方により自然に導けるからです．これは現在ゲージ理論と呼ばれています．先生の目標であった『統一』には重力も同様な立場で取り扱うのが今の段階では自然ではないでしょうか．一昨日最初に触れた私自身の小さな発見（もう40年前になりますが）も，実はこのことと関係します．



弦から導かれる $h_{\mu\nu}$ の非線形相互作用：輪の弦の伝播が重力を生むが，輪と直交する開弦の立場からも一般相対論的重力を記述できる．

A：どういうことか簡単に説明してくれたまえ．

T：これは現在は（超）弦理論と呼ばれている考え方です．弦（string）は太さがゼロで質量が長さに比例するような線としての物理的自由度です．実は，この弦の量子力学から一般相対性理論が導かれるというのが私の発見です．昨日非幾何学的立場として議論したのに近いメカニズムです．量子力学でなければならない理由は，弦の量子力学的な状態の1つがちょうど $h_{\mu\nu}$ に対応する場の存在に導くからです．弦の長さがゼロと看做せる極限でその性質を調べると，この場がまさに計量テンソルとして振る舞うのです．そして，弦の量子状態としての $h_{\mu\nu}$ が弦が存在する背景時空自身を変形する自由度でもあるということが，この理論の対称性からの必然的な結果として説明できます．

A：うーん，それは想像を絶するが，おもしろそうだ．幾何学的な見方ともつながり得るということか．だが，どう『統一』につながるのかね．

T（黒板に図を書きながら）：弦の境界条件や励起状態の違いにより，量子状態として $h_{\mu\nu}$ とは異なる多様な場が導かれ，それが電磁力を含む他の力を説明するのに相応しい性質を持っているのです．$h_{\mu\nu}$ は輪のような閉じた弦に対応するのですが，端点に対応する境界条件を満たす開いた弦からは，自然に A_μ やその一般化（ゲージ場）が導かれま

す．また，ここ 15 年ほどの発展で，こんな風にして両者が同じ 1 つの物理の異なる表現の仕方に対応しているという理解ができます．ゲージ重力対応（ホログラフィック原理とも密接な関係がある）と呼ばれています．ゲージ理論という一見幾何学的立場とは無関係なところから，$h_{\mu\nu}$ の非線形相互作用や境界自身の運動方程式が理解できます．例えば，境界が空間的ゼロ次元（つまり点）の場合，先生たちの 1938 年の速度展開と似た方法により $(v/c)^6$ まで計算して導かれます．こうした様々な断片的結果を統合し，『新たな幾何学的見方』を探ることが現下の課題です．

[ここまで話したところで，A の姿は突然消えた．夢から覚めた T：あ！ もうこんな時間か．今日から会議が始まり，自分が最初に話す予定なのに….T は「またいつか A に会いたいものだ」とつぶやきつつ，支度を急いだ．]

なお，本解説関連の文献を知りたい方は T. Yoneya, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **144** (2001) 176–194, T. Yoneya, *The Birth of String Theory*, 459–483 (Cambridge Univ. Press, 2012) を参照してほしい．

（よねや・たみあき，放送大学教養学部）

強結合と弱結合

今村 洋介

1. はじめに

物理学において，見かけが全く異なる２つの系が同じ振舞いを示す，あるいは，ある１つの系であってもその定式化の方法によって全く異なる問題に見えるということがしばしば起こる．このような関係を用いると，一見難しい問題が，思いもよらなかった方法で簡単に解けてしまうということがある．本稿では，最近の**場の量子論**の進展において，そのような系に対する表現の多様性が役立つ例について解説したい．

場の量子論の話を始める前に，「違って見えるものが実は同じ」であるということのイメージをつかんでもらうために，簡単な例を挙げておこう．次の２つの定積分の問題を見ていただきたい．

$$I_{\mathrm{A}} = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - z\sqrt{1-z^2} - \sin^{-1} z \right) dz, \quad (1)$$

$$I_{\mathrm{B}} = \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} dx. \quad (2)$$

これら２つの積分の結果は等しいのであるが，そのことに２つの式だけを見て気付くことができるだろうか．もちろんどちらも初等的な積分であり，実際に計算してみると $I_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{B}} = 2/3$ であることを確認することができる．しかし，そのような計算をしなくてもこれらが等しいことが分かる簡単な理由がある．

実は，この２つの積分はどちらも図１にある立体の体積を与える式である．立体の体積はその断面積を積分することによって得られるが，z 一定面を用いれば I_{A} の積分になり，x 一定面を用いれば I_{B} の式が得られる．もとの問題が分かってしまえば，この２つの定積分が一致することは当然である．しかし積分の式を見ただけではその２つが等しいことに気付く人は少ないだろう．

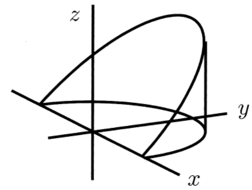


図１ 体積を求めよ．底面は半径１の半円，斜面の傾きは 45 度．

ここで，I_{A} の積分が数学的にとても重要な問題であるような仮想的な世界を想像してみよう．しかもその世界ではまだ数学のレベルが低く，置換積分や部分積分などのテクニックが知られていないとしてみよう．すると，この積分の背後に図１のような立体が存在し，そのことを通して問題を I_{B} のような簡単な積分に書き換えることができるということは大発見であり，その他の積分に対しても同じ手法を適用することによってその世界の数学は大きく進展するかもしれない．

2. 結合定数

先ほど挙げた問題，

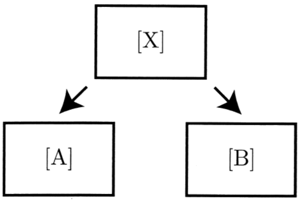


図 2　問題 [A] と [B] はより上位の問題 [X] の異なる表現.

[A]　I_{A} の積分,
[B]　I_{B} の積分,
[X]　立体の体積の問題

は図 2 のような関係にあり，[A] は解くのが難しく，[B] は簡単であった．それでは物理系（以下では特に場の量子論）において問題の難しさとは何であろうか.

物理系の振舞いは積分や微分方程式などの形で表されるが，それらは通常厳密には解くことができず，何らかの近似を行うことが必要になる．そこでしばしば**摂動論**が用いられる．摂動論はもともと惑星の運動を計算するために開発された手法である．例えば火星の公転運動をニュートン力学に従って計算することを考えよう．火星は太陽系内の様々な天体からの重力の影響を受けて運動するが，太陽の重力の影響のみを取り入れた二体問題として扱うのがよい近似である．その場合には解析的に問題を解くことができ，火星は太陽の周りをケプラーの法則に従って周回するという結果が得られる．しかし，正確には太陽以外の惑星（主に木星）の影響により，ケプラーの法則によって予測される位置から少しずつずれていくので，正確な位置を知るためにはその微小な効果（**摂動**）を取り入れる必要がある.

このように，まずは主要な効果のみを考慮して問題を解き，そこからの微小なずれを補正として計算する方法が摂動論である．摂動論による近似の良し悪しは，主要な効果と，そこからのずれを与える補正との比を与える無次元量によって見積もることができる．惑星の運動の場合には太陽と木星の質量の比 $\lambda = M_{\text{木星}}/M_{\text{太陽}} \sim 0.001$ をその目安として採用することができるであろう．この値が小さいおかげでケプラーの法則はよく成り立つ.

摂動論は惑星の運動だけではなく，物理の様々な場面で用いられるが，その際にも摂動論がどれくらい有効かを表す無次元のパラメータが重要な役割を果たす．場の量子論においてはそのようなパラメータは**結合定数**と呼ばれる．結合定数が大きい**強結合の理論**は解くのが難しく，結合定数が小さい**弱結合の理論**は摂動論を用いて比較的簡単に解析することができる.

場の量子論とは，ミクロな粒子の振舞いを量子論的に取り扱うための枠組みであり，その代表的なものとして**量子電気力学**（**QED**）がある．QED はマクスウェル方程式

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho_e, \quad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{j}_m - \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= \rho_m, \quad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_e + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{3}$$

によって記述される電磁波を，量子化という手続きによって光子と呼ばれる素粒子の振舞いとして記述する理論である．ρ_e と $\boldsymbol{j}_e$ は電荷密度と電流密度，ρ_m と $\boldsymbol{j}_m$ は磁荷密度と磁流密度である．電場や磁場は電荷，磁荷を持つ粒子の間に働く力を媒介するものであり，総称して**ゲージ場**と呼ばれる．ゲージ場以外に，QED には電子などを表す**物質場**が含まれる．以下では QED をより一般化した**量子色力学**（**QCD**）にも触れるが，それは QED と同様にゲージ場と物質場によって記述され，現れる場の数や細かい性質が QED と異なるという程度に思っておいて頂ければよい．QED や QCD は総称して**ゲージ理論**と呼ばれる.

マクスウェルの電磁気学において，電荷や磁荷が存在しない場合，電磁波は何者にも影響を受けることなく平面波として進むことができる．このような場は**自由場**と呼ばれ，最も簡単に取り扱うことができる．量子論においては，平面波は何物にも邪魔されずに等速直線運動をする粒子（電磁場の場合には光子）に対応する.

荷電粒子の存在を考慮すると，電磁場はもはや

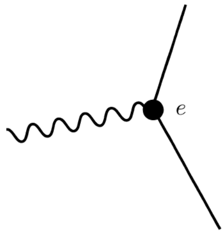


図 3 光子と荷電粒子の相互作用の例．光子と荷電粒子の軌道をそれぞれ波線と実線で表した．相互作用の強さは電荷 e で決まる．

自由場ではなくなる．荷電粒子は電磁場の進行に影響を及ぼすと同時に電磁場は荷電粒子の運動に影響する（図 3）．このため電磁場を記述する上記のマクスウェル方程式と，荷電粒子の運動を記述する別の方程式を同時に解く必要がある．量子論の場合には粒子の生成，消滅を記述する複雑な方程式になるため，厳密に解くことはできない．

ここで述べた電磁場に対する荷電粒子の影響は，摂動としてとらえることができる．この場合，摂動の大きさを決めるのは荷電粒子の電荷であり，結合定数としては素電荷 e を光速 c，プランク定数 $\hbar$，および真空の誘電率 ϵ_0 と組み合わせて無次元化した**微細構造定数**

$$\alpha = \frac{1}{\hbar c}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sim \frac{1}{137} \tag{4}$$

がよく用いられる．この量が小さいため，電磁波はほぼ自由場として振る舞い，荷電粒子の存在を無視した計算結果，例えば黒体輻射に対するステファン・ボルツマンの法則等は実際の測定結果とよく一致する．

さて，電磁場の場合には結合定数がたまたま小さかったため摂動論を用いることができたのであるが，もし逆に結合定数が大きかったらどうであろうか．実はそのような相互作用が実際に自然界に存在し，**強い力**あるいは**強い相互作用**と呼ばれている．電磁気力が電荷，磁荷をもつ粒子間に働くのに対して，強い力は**色荷**と呼ばれる荷量（チャージ）をもつ粒子の間に働く力であり，量子色力学（QCD）によって記述される．原子核を構成する陽子や中性子（核子）は，**クォーク**と呼ばれる色荷を持つ粒子が 3 つ，強い力によって束縛されることによってできている．強い力の結合定数は大きく，クォークは核子内部で強く結び付いているため，我々が色荷を持つ粒子を直接目にすることはない．

陽子と電子が電磁気力によって水素原子をなすことがシュレーディンガー方程式を解いて簡単に示されるのとは異なり，強い力によってクォークが束縛状態をなすことを計算によって示すのは簡単ではない．これはひとえに結合定数が大きく，摂動論を用いた計算が有効ではないからである．このような強結合の場の理論の性質を解明することは，現在の素粒子論の主要的課題の 1 つであり，コンピュータを用いた数値的解析が成功を収めている．しかしここでは図 2 のような関係にあるいくつかの系を用いた解析について考えてみたい．[A] を強結合のゲージ理論だとしたときに何らかの [X] を経由して [B] に相当する弱結合の理論へ移行することができれば，問題を単純化することができると期待される．このような [A] と [B] の関係はしばしば**双対性**と呼ばれる．

3. 電気的記述と磁気的記述

双対性の代表例である**電磁双対性**について述べるために，量子場の理論において電荷と磁荷がどのように扱われるかをみてみよう．

電場と磁場はいくつかの共通の性質を持つ．それぞれには対応するチャージ（電荷，磁荷）が存在し，同じ符号のチャージは反発し，逆符号のチャージは引き合う．このような類似性は，マクスウェル方程式 (3) が電気的な変数と磁気的な変数の入れ替え

$$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \rho_e, \boldsymbol{j}_e) \leftrightarrow (\boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}, \rho_m, \boldsymbol{j}_m) \tag{5}$$

の下で対称であることに起因している．この対称性は形式的にはきれいであるが，量子論的な定式化を行う際にはポテンシャル場を導入する必要があり，この対称性を保ったままの定式化を行うことはできない．ポテンシャル場 $(\boldsymbol{A}, \phi)$ は次の関



図 4　基本的粒子（左）とソリトン（右）．基本的粒子は大きさがないのに対し，ソリトンは有限の大きさを持つ場の配位である．

係式により定義される．

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}. \tag{6}$$

これはマクスウェル方程式 (3) の 2 つ目と 3 つ目において $\boldsymbol{j}_m = \rho_m = 0$，すなわち磁荷が存在しないとした式を解くことで得られる．このため，ポテンシャルを用いた記述は磁荷を扱うのには適さないが，電荷と電磁場の相互作用は簡単に記述できる．そこでこれを**電気的記述**と呼ぶことにしよう．

電気的記述では，磁荷を持つ粒子をラグランジアン中の変数として導入することはできないが，これは必ずしも磁荷を持つ粒子が理論に含まれないというわけではない．ある種のゲージ理論においてはしばしば**ソリトン**として磁荷を持つ粒子が現れる．ソリトンというのはエネルギーがある点のまわりに局在した場の方程式（電磁気学のマクスウェル方程式に相当するもの）の解であり，時間がたっても形が崩れず安定に存在するものである．また，その大きさが無視できるような状況ではあたかも点粒子のように振る舞う（図 4）．一方，荷電粒子は基本的粒子として記述され，ラグランジアン中に現れる場を量子化することによって現れる．このように，電気的記述においても電荷と磁荷の両方が存在し得るが，その現れ方は全く異なる．

電気的記述に対して**磁気的記述**というべきものも存在する．それは電気的記述に対して (5) の入れ替えを行ってポテンシャルを定義することで実現される．

$$\boldsymbol{H} = -\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{A}}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\widetilde{\phi}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\nabla} \times \widetilde{\boldsymbol{A}}. \tag{7}$$

磁気的記述においては，電荷と磁荷の現れ方が電気的記述の場合とは逆になっており，磁荷は基本的粒子として現れるのに対して，電荷を持つ粒子はソリトンとして記述される（表 1）．

表 1　記述による電荷，磁荷の現れ方の違い．

	[A] 電気的記述	[B] 磁気的記述
電荷	基本的場	ソリトン
磁荷	ソリトン	基本的場

4. 電磁双対性

電気的記述，磁気的記述はそれぞれ磁荷，電荷が存在しない状況を記述するのに適している．マクスウェル理論において電荷も磁荷も存在しない場合には両方の記述が可能であり，それらの間は (6) と (7) を通して変数変換によってつながっている．図 2 に現れる [X]，[A]，[B] は以下のものと対応させることができる．

[X]　$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B})$ を用いた記述，
[A]　ポテンシャル $(\boldsymbol{A}, \phi)$ を用いた電気的記述，
[B]　ポテンシャル $(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\phi})$ を用いた磁気的記述．

この場合 [A] と [B] は等価な理論を与え，それらの間の関係は電磁双対性と呼ばれる．電荷も磁荷も存在しない場合は電磁場が自由場であり，どの記述においても簡単に問題を解くことができるから，複数の記述が存在することの有難味はそれほどない．

それでは，電荷や磁荷が存在する場合にはどうであろうか．よく知られている事実として，素電荷 e と素磁荷 e_m の間には**ディラックの量子化条件**と呼ばれる関係式

$$ee_m = 2\pi\hbar \tag{8}$$

が成り立つ．従って，e を用いて (4) のように定義した電気的記述の結合定数 α と e_m から同様に定義した磁気的記述の結合定数

$$\alpha_m = \frac{1}{\hbar c}\frac{e_m^2}{4\pi\mu_0} \tag{9}$$

の間にも反比例の関係 $\alpha\alpha_m = 1/4$ が成り立つ．このため，もし，電磁双対な 2 つの理論があれば，

強結合な片方の理論を，弱結合なもう片方の理論を用いて解析することができるため，この関係は重要な意味を持つ．

そのような非自明な双対性は変数変換によってつながるような単純な関係にはなっていない．もしそのような2通りの記述が存在したとすれば，両方の記述において理論に含まれる粒子の電荷，磁荷は同じになっているはずであるが，上で述べたように2つの理論における電荷，磁荷の現れ方は全く異なるため，2つの理論において存在する粒子の電荷磁荷が一致することを示すだけでも極めて非自明な問題となる．このような理由のため，電荷，磁荷が存在する場合に電磁双対性が厳密に証明された例は存在しない．任意のゲージ理論に対して電磁双対な理論が存在するかどうかは明らかではないが，超対称性（ボーズ粒子とフェルミ粒子の間の対称性）を持つ理論の中には，多くの状況証拠から互いに電磁双対な関係にあるであろうと考えられている例がいくつも見つかっている．ここでは古くから知られている例として**Montonen–Olive**（**MO**）**双対性**[1]を挙げておこう．これは

[A]　結合定数 g を持つ 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称 $SU(N)$ ゲージ理論，

[B]　結合定数 $\widetilde{g}=2\pi/g$ を持つ 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称 $SU(N)$ ゲージ理論

の間の等価性を主張する．「$\mathcal{N}=4\cdots$」が何を指すのかについてここで説明する余裕はないが，理論に含まれるゲージ場と物質場がある特定の組合せになっていることを示す．これ以外にもいくつもの双対性が知られており，Seiberg の双対性[2]はその代表例である．また，Seiberg と Witten による $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の厳密解の構成[3]においても電磁双対性は中心的な役割を果たしている．

5. 弦理論，M 理論

MO 双対性において，[A] と [B] は互いに反比例する結合定数 g と $\widetilde{g}$ を持つゲージ理論であり，

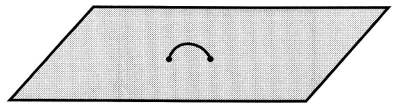


図5　ブレーンと，ブレーンにくっついた弦．

それらの等価性は 4 次元の場の理論の枠内では極めて非自明であるが，実は**M 理論**を用いると [X] に相当するものを与えることができ，双対性をその 2 通りの記述として理解することができる．このことを説明するために**弦理論**と M 理論について簡単に触れておこう[4]．

弦理論はその名のとおり，弦を基本的オブジェクトとする理論である．数学的無矛盾性の要請から弦が運動する時空は 10 次元でなければならない．振動する弦は様々なスピンや質量をもつ粒子と見なすことができ，それらがゲージ場や重力場を含むため，重力を含む統一理論として注目されてきた．さらに弦理論は**D ブレーン**と呼ばれる様々な次元の広がりを持つオブジェクトを含み，その表面には弦がくっつくことができる（図 5）．空間方向に $p=1,2,3,\ldots$ 次元の広がりを持つものは特に Dp ブレーンと呼ばれ，その上にくっついた弦は低エネルギーにおいてブレーン上を運動する粒子のように見なすことができる．M 理論は弦理論よりも 1 つ高い次元（11 次元）の時空上で定義され，2 種類のブレーン（**M2 ブレーン**と**M5 ブレーン**）を含む理論である．これら M ブレーンの上にも D ブレーンと同様にその上を伝播する自由度が存在し，3 次元および 6 次元の非自明な理論を与えている．M5 ブレーン上の 6 次元の理論はしばしば **(2,0) 理論**と呼ばれる．

MO 双対性の上位にある [X] は，次のものである．

[X]　(2,0) 理論を図 6 の $\boldsymbol{T}^2$ でコンパクト化したもの．

コンパクト化というのは，空間のある方向を有限の長さに制限し，その両端を同一視することで周期的にする操作のことで，$\boldsymbol{T}^2$ コンパクト化は 2 つの方向をある周期 L_1 と L_2 でコンパクト化することを意味する．(2,0) 理論の時空の 1 方向をコ

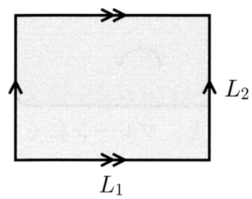


図 6 コンパクト化に用いる $\boldsymbol{T}^2$．2 つの辺の長さの比が 4 次元理論の結合定数となる．

ンパクト化すると 5 次元時空上のゲージ理論が得られ，さらに別の 1 方向をコンパクト化すると，4 次元のゲージ理論が得られる．従って上記の [X] は 4 次元のゲージ理論を与えるのである．

面白いのは，どちらの方向を先にコンパクト化するかによって得られる理論の結合定数が異なるという点である．

$$g=\sqrt{2\pi}\frac{L_1}{L_2}, \quad \widetilde{g}=\sqrt{2\pi}\frac{L_2}{L_1}. \tag{10}$$

これらは互いに反比例しており，MO 双対性の関係にある 2 つのゲージ理論を与える．従って，[X] においては MO 双対性は単に図 6 の長方形の縦と横の入れ替えとして解釈できる．つまり，場の理論の非自明な双対性が，ブレーンを用いることで単純な幾何学的関係として解釈できるのである．これは近年ブレーンを用いた解析が注目されている理由の 1 つである．

電磁双対性についての話はこれで終わるが，弦理論によって得られる全く別の双対性についても触れておこう．[X] として

[X] D3 ブレーンの熱力学的性質（例えば状態方程式）を決定せよ．

という問題を考えよう．この問題には複数のアプローチが存在する．一つは D3 ブレーン上の場をブレーンの熱的励起と見なすことによって解く方法である．すると

[A] ブレーン上に実現されるゲージ理論の状態方程式を決定せよ．

という問題に書き換えられる．また別の方法として，ブレーンが質量をもっており，重力を通して時空を曲げた結果，ブラックホール的なものとなることを利用することもできる．その場合解くべき問題は

[B] ある種のブラックホールの熱力学的性質を明らかにせよ．

となる．[A] と [B] は一つの問題 [X] に対する 2 つのアプローチであるから，同じ答えを与えると期待される．ゲージ理論と重力の等価性を主張するこの関係は**ゲージ・重力対応**[5)]と呼ばれており，現在の弦理論や場の量子論の研究において中心的な話題の 1 つとなっている．この話題については本特集の江口徹氏による記事にてさらに詳しく解説されている．

6. おわりに

本稿では，強結合の理論と弱結合の理論が双対性によって関係している例をいくつか与えた．それらはしばしば弦理論や M 理論における系の表現の多様性として理解することができる．残念ながら弦理論や M 理論はその構成論的定義が未だに知られていないため，それを利用した双対性の説明は厳密な証明と見なすことはできないが，それらを大胆に用いた解析はゲージ理論の理解についての大きな進展をもたらしている．将来，より弦理論，M 理論への理解が進めば，現在知られているゲージ理論の双対性ははじめに与えた 2 つの積分が等しいのと同様に自明な結果と見なされるようになるかもしれない．

参考文献

1) C. Montonen and D. Olive, *Phys. Lett.* **B72**, 117–120, 1977.
2) N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B435**: 129–146, 1995.
3) N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys.* **B426**: 19–52, 1994; Erratum, ibid. **B430**: 485–486, 1994.
4) 非専門家向けの弦理論の教科書としては次のものが分かりやすい．B. Zwiebach, “A First Course in String Theory”, Cambridge University Press, 2009.
5) J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**: 231–252, 1998.

（いまむら・ようすけ，東京工業大学大学院理工学研究科）

ホログラフィック原理の意味とその発展

江口 徹

1. はじめに

写真や絵画は3次元空間の中の風景や人物を2次元の画面の上に再現することができるが，このように高い次元の空間内の情報を低い次元で再構成する手法を**ホログラフィー**（holography）と呼んでいる．物理学の場合，例えば2次元の球面を考えて，その表面上の電磁場などの値を測定することで球の内側の各点における場の値がすべて推測できてしまうといった状況がホログラフィーに相当する．この場合，電磁場の自由度は球の表面だけに存在し，球の内部には独立な自由度が存在しないと考えられる．

物理学の理論では，通常はこうしたホログラフィックな現象は起こらない．それは場の量子論では時空のすべての点に場の自由度が存在するため，球の表面の場の値を決めても，その内側では独立の値を取ることができるためである．場の自由度が時空の各点に存在する場合には，場が全空間にもつエネルギーなどは一般に空間全体の体積に比例する．一方，ホログラフィーが成り立つような場合には，場の持つエネルギーは空間の体積に比例せずに，その表面積に比例するはずである．

こうしたホログラフィーに似た不思議な現象が，ブラックホールの物理に存在するということがしばらく以前から知られていた．その最もはっきりした証拠は，次節で見るようにブラックホールのもつエントロピーがブラックホールの体積ではなく表面積に比例することである．もし重力理論がホログラフィックな振舞いを示すならば重力理論の持つ最も著しい特徴となり，重力理論の本質を暴き出す可能性を与える．

2. ブラックホールのエントロピー

ブラックホールが熱力学的な性質を持ち，特に温度，エネルギー，エントロピーなどに相当する熱力学量を持っていることは良く知られている．ブラックホールの持つエントロピーはいわばブラックホールの中に落ち込んだ物質が持っていたエントロピーの総和に相当すると考えられる．ホーキング（Hawking）輻射などの正確な議論をするためには，曲がった時空の場の量子論を用いる必要があるが，ここでは紙数が足りないのでユークリッド化したブラックホール計量を使う簡便法を使って，ブラックホールの温度やエントロピーを調べてみよう．

まず，ブラックホールの時空として最も典型的なシュバルツシルト（Schwarzschild）・ブラックホールを考える．シュバルツシルト・ブラックホールは球対称で時間に依存しない．その計量は（簡単のため重力定数 $G=1$，光速度 $c=1$ の単位を用いる）

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{(1-\frac{2M}{r})}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{1}$$

で与えられる．ここで M はブラックホールの質量，$d\Omega_2^2$ は2次元球面の面要素である．動径方向の座標 r が $2M$ に等しい球面はホライゾン（horizon），あるいはイベント・ホライゾンと呼ばれ（以下，ホライゾンとする），特別な性質を持つ．今，ホライゾンの外側（$r>2M$）から内側（$r<2M$）に入ると (1) 式の因子 $1-2M/r$ が符号を変える．通常の時空では時間座標の2乗 dt^2 の係数は負，空間座標の2乗 dr^2 の係数は正なので，ホライゾンの中では時間と空間がその役割を入れ替えたように見える．ホライゾンの外側で

は粒子は時間 t の増加する方向にしか進行しないが，これに対応してホライゾンの中では距離 r が減少する方向にしか運動できなくなり，このためホライゾンの中に入った粒子は必ずブラックホールの中心に引きずり込まれる．ホライゾンは内向きの一方通行の膜のように働き，その内側からは何ものも逃げ出すことができない．

さて，ここで $r \approx 2M$ の付近で変数変換

$$\frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} = dR^2 \Longrightarrow 2\sqrt{2M}\sqrt{r-2M} \approx R$$

を施し時間 t をユークリッド化（$t \to it$）すると，シュバルツシルト計量は $r \approx 2M$ で書き直されて

$$ds^2 = \frac{1}{16M^2}R^2dt^2 + dR^2 + (2M)^2d\Omega^2$$

となる．上の計量の初めの 2 項は，t を角度座標，R を動径座標と見ると 2 次元の平面 $\mathbf{R}^2$ の計量を極座標表示した形

$$ds^2_{\mathbf{R}^2} = r^2d\phi^2 + dr^2$$

になっている．角度変数 ϕ は周期 2π を持つためこれと比較して虚時間 t の持つ周期は

$$\text{周期} = 8\pi M \tag{2}$$

であることが分かる．

一般にユークリッド化した時間が周期 $1/T$ を持つ理論が，温度 T を持つ系を記述することはよく知られている．従って質量 M のシュバルツシルト・ブラックホールは温度 $1/8\pi M$ を持つことが分かる．

$$T = \frac{1}{8\pi M}. \tag{3}$$

これがホーキング輻射の持つ温度と一致する．また，熱力学の関係式 $dE = TdS$（$E = M$ はエネルギー，S はエントロピー）を用いると

$$dE = TdS \Longrightarrow dM = \frac{1}{8\pi M}dS. \tag{4}$$

従ってシュバルツシルト・ブラックホールの持つエントロピーは

$$S = 4\pi M^2$$

に等しい．

ホライゾンは半径 $2M$ の 2 次元球面なので，その面積は

$$A = 4\pi\,(2M)^2 = 16\pi M^2. \tag{5}$$

従って，ブラックホールのエントロピーはホライゾン面積に比例することが分かる．

$$S = \frac{A}{4}. \tag{6}$$

これが有名な**ベッケンシュタイン・ホーキング（Bekenstein–Hawking）の公式**で，シュバルツシルト・ブラックホールに限らず任意のブラックホールについて成り立つ．

ベッケンシュタイン・ホーキングの公式によればブラックホールのエントロピーはブラックホールの表面積に比例し，体積には比例しない．エントロピーを場の自由度に比例するとみなすと重力場の真の自由度はブラックホールの表面にしか存在せず，ブラックホールの中には存在しないように見える．

3. AdS/CFT 対応

ベッケンシュタイン・ホーキングの公式は重力理論の研究者に大きな謎を投げかけた．この公式に刺激されて重力理論のホログラフィックな解釈が多くの研究者によって試みられたが，明快な定式化は得られなかった．

1997 年になってマルダセナ（Maldacena）は 5 次元の反ドジッター空間（Anti-de Sitter space，AdS と略記）上の（超）重力理論とその境界 $\mathbf{R}^4$ 上にある（$\mathcal{N}=4$）超対称 $SU(N)$ ゲージ理論がホログラフィックな関係に有ることを提唱した[1]．超対称性 $\mathcal{N}=4$ を持つ 4 次元の $SU(N)$ ゲージ理論は共形不変性を持つため共形場理論（conformal field theory，CFT と略記）と呼ばれる．このためマルダセナの提唱した対応関係は AdS/CFT 対応とも呼ばれる．グプサー・クレバノフ・ポリアコフ（Gubser–Klebanov–Polyakov）[2] とウィッテン（Witten）[3] は，直ちに AdS/CFT 対応に関与する重力場とゲージ場の間の厳密な関係式を提唱し，ホログラフィーのアイディアにしっかりした数学的基礎付けを与えた．

AdS 空間

AdS 空間は超重力理論の研究者などを除くとあまり一般に知られていない．ここでは AdS 空間を D3 ブレーンや M2 ブレーン等の作る空間と関連させて議論しよう．

$p+1$ 次元の AdS_{d+1} 空間は $d+2$ 次元空間の中の双曲面として定義される．

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_{d-1}^2 + X_d^2 = -L^2. \tag{7}$$

ここで X_i $(i=-1,\cdots,d)$ は実数，L は AdS 空間

の半径と呼ばれる．この表示では AdS_{d+1} 空間の持つ対称性 $SO(2,d)$ が見やすい．上式で X_0^2 の係数を $+1$ にとった場合はユークリッド AdS 空間と呼ばれる．AdS 空間のポアンカレ座標は

$$U = X_{-1} + X_d,$$
$$x_\alpha = \frac{X_\alpha L}{U} \quad (\alpha = 0, 1, \cdots, d-1),$$
$$V = X_{-1} - X_d = \frac{\sum x_\alpha^2 U}{L^2} + \frac{L^2}{U}$$

で定義される．AdS 空間の計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dX_{-1}^2 - dX_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{d} dX_\alpha^2 \\ &= \frac{U^2}{L^2}\sum_{\alpha=0}^{d-1} dx_\alpha^2 + L^2\frac{dU^2}{U^2} \end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる．下に見るように AdS_5 空間は D3 ブレーンの作る空間から適当な極限を取って得られる．

D3 ブレーン

D3 ブレーンはタイプ IIB の超弦理論に現れるブレーンで空間 3 次元に広がり，5 形式の場のフラックスを帯びている．D3 ブレーンが N 枚重なるとその上に 4 次元 $SU(N)$ のゲージ理論が生成されることが知られている．超弦理論の結合定数を g とすると D3 ブレーンの周りの時空の計量は

$$\begin{aligned} &ds^2 = f^{-1/2}dx_{||}^2 + f^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \\ &f = 1 + \frac{4\pi g N \alpha'^2}{r^4} \end{aligned} \tag{9}$$

で与えられる．ここで $dx_{||}^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ はブレーンに平行方向の線要素，f はブレーンに直行する方向のクーロンポテンシャルを表す．$\alpha' = l_{\mathrm{st}}^2$ は弦理論の長さの単位（の 2 乗）である．ここで near horizon limit と呼ばれる極限

$$\alpha' \to 0, \quad u = \frac{r}{\alpha'} = \text{fixed} \tag{10}$$

をとると，D3 ブレーンの周りの空間は

$$\begin{aligned} ds^2 = \alpha' \Bigg[&\frac{u^2}{\sqrt{4\pi g N}} dx_{||}^2 + \sqrt{4\pi g N}\frac{du^2}{u^2} \\ &+ \sqrt{4\pi g N} d\Omega_5^2 \Bigg] \end{aligned}$$

となって，$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ に一致する（(8) 参照）．ここで

$$\alpha' u = U, \quad L^2 = \alpha'(4\pi g N)^{1/2} \tag{11}$$

であり，S^5 の半径も L に一致する．ゲージ理論の結合定数 g_{YM}^2 は $g_{YM}^2 = g$ で弦理論の結合定数 g と関係している．従って上式 (11) から

$$4\pi g_{YM}^2 N = 4\pi\lambda = \left(\frac{L}{l_{\mathrm{st}}}\right)^4. \tag{12}$$

ここで $\lambda = g_{YM}^2 N$ はいわゆるトフーフト（'t Hooft）の結合定数である．今考えている near horizon limit (10) では string の長さが AdS 空間の半径 L に比べて短い極限なので (12) から

$$\lambda \to \infty \tag{13}$$

となる．すなわち強結合極限のゲージ理論が AdS 空間の重力理論と対応することになる．

M ブレーン

M 理論に存在する M ブレーンの場合も簡単に見ておくことにしよう．M 理論は 11 次元時空に存在するとされる理論で種々の超弦理論を統一するより根源的な理論と考えられるが，まだそのミクロな定式化は知られていない．M 理論のブレーンには空間 2 次元に広がる M2 ブレーンと空間 5 次元に広がる M5 ブレーンがある．超弦理論の D ブレーン上にはゲージ理論が存在することはよく知られているが M ブレーン上にどんな理論が存在するかはこれまで知られていなかった．しかしこの数年の進展で M2 ブレーン上にはチャーン・サイモンズ（Chern–Simons）型のゲージ理論と適当な物質場が結合した系が存在することが明らかにされた（ABJM モデル）．

M 理論では基本的な質量のスケールはプランク・スケール l_{P} である．M2 ブレーンの計量は

$$\begin{aligned} &ds^2 = f^{-2/3}dx_{||}^2 + f^{1/3}(dr^2 + r^2 d\Omega_7^2), \\ &f = 1 + \frac{2^5\pi^2 N l_{\mathrm{P}}^6}{r^6} \end{aligned} \tag{14}$$

で与えられる．ここで $dx_{||}^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$ は M2 ブレーン方向の線要素，$d\Omega_7^2$ は 7 次元球面の面要素である．Near horizon limit

$$l_{\mathrm{P}} \to 0, \quad u^{1/2} = \frac{r}{l_{\mathrm{P}}^{3/2}} \tag{15}$$

をとると，計量

$$\begin{aligned} ds^2 = l_{\mathrm{P}}^2 \Bigg[&\frac{u^2}{(2^5\pi^2 N)^{2/3}} dx_{||}^2 + \frac{(2^5\pi^2 N)^{1/3}}{u^2} du^2 \\ &+ (2^5\pi^2 N)^{1/3} d\Omega_7^2 \Bigg] \end{aligned} \tag{16}$$

が得られる．これは $\mathrm{AdS}_4 \times S^7$ の計量に一致する．

4. GKPW 関係式

マルダセナが AdS/CFT 対応を提案した直前にはク

レバノフらによる D3 ブレーンの反射透過係数の計算があり[4]，AdS/CFT の動機付けの一つを与えたものと考えられる．クレバノフらは D3 ブレーンに入射する物質波を考え，D3 ブレーンの周りの重力場による波の反射，透過係数を計算した．また，同様に D3 ブレーン上に存在するゲージ場との相互作用を用いて反射，透過係数を計算し，両者が一致することを示した．このため D3 ブレーン上にあるゲージ場とその周りの重力場の間には特別の対応関係があることが示唆される．Near horizon limit をとると，D3 ブレーンの時空は $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ となるが，AdS_5 空間は $SO(2,4)$ の対称性を持ち，この対称性は共形不変性を持つ $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の持つ対称性 $SO(2,4)$ と一致している．

しかしこうした議論だけでは，AdS/CFT 対応のような強い主張はなかなか受け入れられない．ゲージ場と重力場のホログラフィックな対応関係をより具体的に示し強い説得力を持たせたのは GKPW の仕事[2, 3]と言えるだろう．以下では式が見やすくなるように AdS_{d+1} 空間の座標を計量が

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}\left(dz^2 + \sum_{i=1}^{d}(dx_i)^2\right) \tag{17}$$

と書かれるように取り直そう（式 (8) で $U=\frac{1}{z}$, $L=1$ とおき，x_α の添字（$\alpha=0,\cdots,d-1$）を x_i（$i=1,\cdots,d$）にとり替えた）．$z\to 0$ が AdS 空間の端にあたる．以下では AdS_{d+1} 空間全体をバルク（bulk），AdS_{d+1} 空間の端のミンコフスキー空間 $\mathbf{R}^d$ をバウンダリー（boundary）と呼ぶことにする．

GKPW は基本関係式

$$\left\langle \exp\int_{\mathbf{R}^d}\phi_0\,\mathcal{O}\right\rangle_{\mathrm{CFT}} = Z(\phi_0) = e^{I(\phi_0)} \tag{18}$$

を提案した．ここで場 $\phi_0(\boldsymbol{x})$ はバルクの場 $\phi(z,\boldsymbol{x})$ がバウンダリー $z\to 0$ でとる値．$I(\phi_0)$ は ϕ がバウンダリーで値 ϕ_0 を採るという境界条件を課したときのバルクの（超）重力理論の作用である．一方左辺の $\mathcal{O}$ はバウンダリー上のゲージ理論に含まれるオペレーターで場 ϕ の境界値 ϕ_0 と結合しているとする．ϕ_0 はオペレーター $\mathcal{O}$ の source に相当し，$\mathcal{O}$ が CFT のエネルギー運動量テンソルならば ϕ は計量，$\mathcal{O}$ がカレントならば ϕ は（バルクの）ゲージ場などとなる．左辺は source と結合した CFT の分配関数である．

関係式 (18) の意味を見るために，（超）重力理論の相互作用を無視する近似で質量を持たないスカラー場の寄与を考えよう．境界 $z=0$ で値 $\phi_0(\boldsymbol{x})$ をとるスカラー場のバルクでの値 $\phi(z,\boldsymbol{x})$ は AdS 空間のグリーン関数

$$K(x) = c\,\frac{z^d}{(z^2+\sum_{j=1}^{d}x_j^2)^d} \tag{19}$$

を用いて（c は定数）

$$\phi(z,\boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{x}'K(z;\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\phi_0(\boldsymbol{x}')$$

で与えられる．グリーン関数は性質

$$\lim_{z\to 0}K(z,\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}) \tag{20}$$

を持つ．このスカラー場からくる重力理論の作用 I への寄与は部分積分を用いて

$$\begin{aligned} I(\phi) &= \frac{1}{2}\int_{\mathrm{AdS}_{d+1}} d^{d+1}x\sqrt{g}|d\phi|^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} d\boldsymbol{x}\; z^{-d}z\frac{\partial\phi(z,\boldsymbol{x})}{\partial z}\phi(z,\boldsymbol{x})|_{z=0} \\ &= \frac{cd}{2}\int d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{x}'\;\frac{\phi_0(\boldsymbol{x})\,\phi_0(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{2d}} \end{aligned} \tag{21}$$

と書き表せる．質量が零でスカラー曲率と結合しないスカラー場 ϕ は共形不変性のため共形次元=0 を持つ．これと結合するオペレーター $\mathcal{O}$ の次元は d である．

よく知られているように CFT では場の 2 点関数は $\langle\mathcal{R}(\boldsymbol{x})\mathcal{R}(\boldsymbol{x}')\rangle = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^{-2\Delta_{\mathcal{R}}}$ のように振る舞う．ここで $\Delta_{\mathcal{R}}$ はオペレーター $\mathcal{R}$ の共形次元である．従って今の場合 ϕ_0 に結合するオペレーター $\mathcal{O}$ の 2 点関数は

$$\langle\mathcal{O}(\boldsymbol{x})\mathcal{O}(\boldsymbol{x}')\rangle = \frac{\mathrm{const.}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{2d}}. \tag{22}$$

式 (21), (22) を比較すると GKPW 関係式 (18)（を ϕ_0 の 2 次まで展開した結果）と一致することが分かる．

質量 m を持つスカラー粒子の場合はグリーン関数は

$$K = c\,\frac{z^{d+\lambda_+}}{(z^2+|\boldsymbol{x}|^2)^{d+\lambda_+}} \tag{23}$$

で与えられる．λ は波動方程式

$$\left(-z^{d+1}\frac{d}{dz}z^{-d+1}\frac{d}{dz}+m^2\right)f(z) = 0$$

の解 $f(z)\approx z^{d+\lambda}$

$$\lambda(\lambda+d) = m^2 \tag{24}$$

から定まる．$\lambda_+ = -d/2+\sqrt{(d/2)^2+m^2}$ は (24) の大きいほうの根である．重力理論の作用を求めると

$$I(\phi) = \frac{c'(d+\lambda)}{2}\int d\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{x}'\,\frac{\phi_0(\boldsymbol{x})\phi_0(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{2(d+\lambda_+)}}.$$

従って ϕ に結合する共形場の次元は

$$\Delta = d+\lambda_+ = \frac{1}{2}(d+\sqrt{d^2+4m^2}) \tag{25}$$

となる．

$z \to 0$ でバルクの場 $\phi(z, \boldsymbol{x})$ の展開を $\phi_0(\boldsymbol{x})$ の次の精度まで求めてみよう[5)].

$$\phi(z, \boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{x}' K_\Delta(z, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\phi_0(\boldsymbol{x}')$$

を展開して

$$\phi(z, \boldsymbol{x}) \to z^{d-\Delta}\phi_0(\boldsymbol{x}) + z^\Delta A(\boldsymbol{x}) + \cdots \qquad (26)$$

とおくと

$$A(\boldsymbol{x}) = \text{const.} \int d\boldsymbol{x}' \phi_0(\boldsymbol{x}')|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^{-2\Delta}$$

を得る．$\phi_0(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ の場合を考えると

$$A(\boldsymbol{x}) = \text{const.}\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^{-2\Delta}$$

となり，関係 $\langle \mathcal{O}(\boldsymbol{x})\mathcal{O}(\boldsymbol{x}')\rangle = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^{-2\Delta}$ を思い出すと

$$A(\boldsymbol{x}) \approx \langle \mathcal{O}(\boldsymbol{x})\rangle \qquad (27)$$

と書ける．すなわち $A(\boldsymbol{x})$ はもう一つのオペレーター $\mathcal{O}$ が $\boldsymbol{x}'$ に挿入された理論における $\mathcal{O}(\boldsymbol{x})$ の期待値であると解釈できる．

ところで共形場の次元の公式 (25) から AdS 空間を伝搬する粒子の質量 m は

$$m^2 \geq -\frac{d^2}{4} \qquad (28)$$

までの負の値をとることができるように見える．通常の平坦な時空では m^2 が負の粒子はタキオンと呼ばれ真空の不安定性を表す．しかし AdS 空間ではちょうど $m^2 = -\frac{d^2}{4}$ までは理論に不安定性が存在しないことが知られている（Breitenlohner–Freedman bound）．

m^2 が $-\frac{d^2}{4} \leq m^2 < 0$ の領域では共形場の次元 Δ は $\Delta < d$ となる．これらは通常の場の理論では relevant なオペレーターに対応する．$m = 0$ は $\Delta = d$ に対応し marginal なオペレーターに，$m^2 > 0$ は irrelevant なオペレーターに対応している．

式 (25) は AdS 空間の質量 m の状態と共形場の次元 Δ の状態の対応関係を与える．$d = 4$ の場合，すなわち $\mathrm{AdS}_5(\times S^5)$ の重力理論と 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ ゲージ理論の対応を考えよう．一般に質量 m や共形場の次元 Δ は理論の相互作用によって複雑な補正を受けるためその解析は難しいが，BPS 状態と呼ばれる特別な状態の場合は超対称性のために理論に非繰り込み定理が働いて，粒子の質量や次元が補正を受けないことが知られている．

重力理論では Kaluza–Klein（カルツァ・クライン，KK と略記）状態と呼ばれるものが BPS 状態になっており，ゲージ理論ではカイラル場の積が BPS 状態を与える．$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ の重力と 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ のゲージ理論において無数の KK 状態とカイラル場の積が (25) を通して対応していることが確認された[3)]．これはホログラフィックなアプローチの著しい成功と言える．現在，非 BPS 状態に対してもこうした対応関係を確かめる研究が精力的に行われている．

5. ホログラフィック超伝導

さて次に，ホログラフィーの起源になったブラックホールの問題に立ち返ってみよう．簡単のため，（漸近的）AdS_4 空間の中に存在する電荷を持ったブラックホールを考えよう．計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2,$$
$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{4r^2} + \frac{r^2}{L^2},$$
$$\Phi = \frac{Q}{r} - \frac{Q}{r_{\mathrm{H}}} \qquad (29)$$

で与えられる．ここで M,Q はブラックホールの質量と電荷，L は AdS_4 空間の半径，Φ は $U(1)$ ゲージ場の時間成分 $A_t = \Phi$ である．r_{H} はホライゾンの半径で $f(r) = 0$ の最大の解で与えられる．$L \to \infty$ とすると (29) はミンコフスキー空間中の荷電ブラックホール解，ライスナー・ノルトシュトローム（Resissner–Nordström）計量と一致する．

AdS/CFT 対応の考え方では，AdS 空間中にブラックホールが存在する重力理論とバウンダリー上のゲージ理論は相変わらず双対関係にあり，ブラックホールが有限温度を持つため，バウンダリー上の理論も同じ温度の場の理論になっているものと考える．

通常のブラックホールには 3 つのパラメタ，質量 M，電荷 Q，角運動量 J しか存在しない．この他に例えばスカラー場をブラックホールの周りに分布させようとすると，スカラー場はブラックホールの中心に飲み込まれるか，無限遠にはじき飛ばされるためブラックホールの周りに安定に分布することができない．これが有名な no hair 定理である．しかし AdS 空間におかれたブラックホールでは何が起きるだろうか？

グブサー[6)]はブラックホールの温度を下げていくとある温度以下ではスカラー場がホライゾン付近に凝縮して有限の密度分布を持つことを示唆した．系のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\left[R - \frac{6}{L^2} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \right.$$
$$\left. - |\partial_\mu \phi - iqA_\mu \phi|^2 - m^2|\phi|^2\right]$$

で与えられる．ここで ϕ は電荷 q を持ったスカラー場である．スカラー場のポテンシャル項は

$$m_{\rm eff}^2 = m^2 + g^{tt} q^2 A_t^2. \tag{30}$$

計量の時間成分 g^{tt} はホライゾンで ∞ に発散するが，$A_t = \Phi$ はホライゾンで零になるようなゲージをとっている（(29) 参照）．このためスカラー場の運動方程式はホライゾン付近で特異性を持たない．

ホライゾンと無限遠で適当な境界条件を課して場 ϕ の振舞いを調べると，系のパラメータを変化させてブラックホールが十分低温になるとホライゾン付近でスカラー場が凝縮することが示唆される．バルクのスカラーの凝縮は関係式 (27) によりバウンダリー理論のスカラー場の凝縮を導き，バウンダリー上の理論が超伝導状態に遷移することを意味する．ホロヴィッツたち[7]は精密な数値計算を用いて相転移点などを決定し，ホログラフィックな超伝導の性質を詳しく調べた．

ホログラフィック超伝導が超伝導現象の新しい理解に導くかどうかは明らかではない（AdS/CFT から導かれるのは古典的な BCS 型の超伝導で高温超伝導体ではないといわれている）．しかしホログラフィック超伝導体の発見以後，類似の手法を用いて物性論の問題が広く扱われるようになった．すなわち，物性論の難問（強結合理論）を AdS/CFT の設定にうまくはめ込み重力理論の古典的な解析に帰着させて解いてしまおうとする試みである．これらは **AdS/CMP**（Condensed Matter Physics）対応と呼ばれ現在活発な研究が行われている．しかし AdS/CMP が物性論研究に本当に的を得た革新的な手法を与えているのかどうか，もう少し待たないとはっきりしないと思われる．

6. 終わりに

前節で考えた設定では，バルクにブラックホールがありバウンダリーに CFT があって互いに双対になっている．従ってブラックホールのミステリーも通常の場の理論の手法を用いて原理的にはすべて解決するのではないかという期待を抱かせる．場の理論はその構成からユニタリーな時間発展をするため，AdS/CFT 対応を信じればブラックホールもユニタリーな時間発展をするはずで，**information paradox** のような問題は初めから存在しないことになる．しかし最近になって，AdS/CFT 対応はまだ information paradox を解いていないという意見が有力になって来ているように思われる．

ホログラフィーは 1 次元高い空間おける重力理論のヒルベルト空間と場の理論のヒルベルト空間の間の（非常に複雑な）写像を決めていると考えられる．ブラックホールが存在する場合にはホライゾンの外側の状態空間がバウンダリー理論のヒルベルト空間に写像されるが，ホライゾンの中の状態空間はバウンダリー理論にしっかりとは写像されていない可能性がある．これは非常に難しい問題で，現在研究者によって意見が分かれている．

AdS/CFT 対応は重力理論に対する過去数十年間における最も重要な発展であるが，我々が知りたい問題，

- 物質が落ち込んでブラックホールが形成される様子をバウンダリーの場の理論で記述できるか？
- ブラックホールが輻射を出しきって最後に消滅したり，remnant と呼ばれる状態に移行するとき，ブラックホールが持っていた情報量はどこに移されるのか，あるいは消滅するのか？

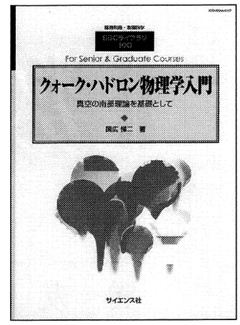
などに関してはまだ答えることができない．

最近ではまた，初期のホーキング輻射によってホライゾンの外側に放射された物質と，ホライゾンの内側に落ち込んだ物質，さらに後期のホーキング輻射によってホライゾンの外側に放射された物質の間の量子論的な相関（entanglement）があり，このためホライゾン付近に時空の特異性が現れるという可能性が提唱されていて[8]，論争を巻き起こしている．こうした問題の理解には EPR（Einstein–Podolsky–Rosen）paradox などが本質的に関係してくる可能性があり，量子力学の基礎と場の理論，さらに一般相対論が解け合った非常に興味深い物理が展開される可能性を秘めている．

参考文献

1) J. Maldacena, *Adv. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
2) S. Gubser, I. Klebanov and A.M. Polyakov, *Phys. Lett. B***428**, 105 (1998).
3) E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998).
4) I. Klebanov, *Nucl. Phys. B***496**, 231 (1997).
5) I. Klebanov and E. Witten, *Nucl. Phys. B***556**, 89 (1999).
6) S. Gubser, *Phys. Rev. D***78**:065034 (2008).
7) S. Hartnoll, C. Herzog and G. Horowitz, *Phys. Rev. Lett.* **101**:031601 (2008).
8) A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski and J. Sully, arXiv:1207.3123 (2012).

（えぐち・とおる，立教大学理学部）



クォーク・ハドロン物理学入門

真空の南部理論を基礎として

国広悌二著，B5判，168頁，本体2238円，サイエンス社

本書は，強い相互作用によってクォークが束縛してできているハドロンの，性質と相互作用を研究する分野であるクォーク・ハドロン物理の入門書である．強い相互作用は素粒子の4つの基本相互作用の1つで，その基礎理論はクォークが持つカラー電荷を素とするゲージ場の理論，量子色力学（QCD）である．QCDは低エネルギーで結合が強いために複雑な真空構造を持つ．その中心となる現象が，南部陽一郎によって発見されたカイラル対称性の自発的破れの現象である．本書は，QCDの基本原理から紐解いて，カイラル対称性の自発的破れとそれに伴って現れる現象，有限温度・密度におけるQCD相図の様子を詳しく解説している．

第1章「序：クォーク・ハドロン多体系の物理学概観」では，湯川秀樹の中間子論に始まりQCDに到るハドロン物理の背景を説明し，南部理論への導入としている．

第2章「場の解析力学と量子場の変換則」では，場の理論の変換則に伴う保存流の導入，ディラック場のカイラル対称性の詳細な解説が与えられる．

第3章「QCDの基本的性質」および第4章「軸性異常項を含む線型シグマ模型」では，QCDにおけるカイラル対称性の自発的破れ，軸性異常および対応する現象を与える有効模型が導入される．

第5章「QCDのカイラル有効模型としてのNJL模型」が本書の中心部分で，南部–ヨナラシニオ（NJL）模型と呼ばれる有効模型が導入され，平均場近似による基底状態（真空）の決定，および集団励起モードとしてのパイおよびシグマ中間子の理論が与えられる．この理論の解説は，式の導出も丁寧に書かれていて初学者にもわかりやすい．特に，NJL模型におけるカットオフの取り方について，著者らの研究に基づいた詳細な議論が与えられている点が類書にはない特徴である．

NJL模型の解法とハドロン現象における帰結は，軽いクォークのフレーヴァー数が2と3の場合に分けて議論されている．3フレーヴァーの場合は軸性異常項が2つの擬スカラーメソン $\eta-\eta'$ の質量差を与えることが明らかになる．ここでは，この研究で世界を先導してきた著者と初田哲男氏が展開してきた理論研究の成果が詳細に解説されている．

第6章「有限温度・密度の場合」および第7章「クォーク数感受率と密度ゆらぎ」では，南部理論から発展して，有限温度・密度下でのQCDの真空の相転移と，それに伴うソフトモードの出現や密度ゆらぎとの結合といった現象を扱っている．第6章では，有限温度の場の理論，有限温度・密度でのカイラル対称性の破れの変化，媒質中でのハドロン励起モードの一般論が与えられている．第7章では，有限温度・密度下で，カイラル相転移と密度ゆらぎが連結する現象のNJL模型による解析の結果が紹介されている．この相転移現象は，QCDの真空に関する理論を実証するための重要なステップとして，高エネルギー重イオン反応によるクォーク・グルーオンプラズマの生成や，中性子星の内部の状態方程式とその質量と構造の研究と関連して，注目を集めている．

付録「非一様物質への相転移：核物質中の π 中間子凝縮を例題として」として，有限密度核物質中でパイ中間子凝縮によって非一様な物質の出現する現象が解説されている．

また，本書には，テキストを補うような式の導出や重要な補足ポイントが[問い]として多く与えられていて，実際に手を動かしていくことで，一層理解が深まるように配慮されている．

このように，本書には著者が中心となって20年以上にわたって進めてきた，南部理論に基づくカイラル対称性の自発的破れの研究成果が，ハドロン物理の初学者や異なる分野の研究者にもわかりやすく展開されている．SGCライブラリの100巻目として誠にふさわしい力作と言える．有限温度・密度のQCD真空上でのハドロン励起モードの研究は現在も最前線の研究対象であり，本書ではあまり触れられていないが，格子QCDやQCD和則による研究も近年急速に進んでいる．今後こうした分野を志して勉強を始める学生にも良い導入の書として薦めたい．

岡　真（東京工業大学大学院理工学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

巽 友正

1984年4月号

本稿の主題である『乱流と渦』の本格的研究はReynolds[1]の乱流発生の実験に始まり，今年で丁度130年になる．そして本誌の創刊以来の30年は，その最近の期間に相等する．

この30年の間に，『乱流と渦』の研究分野では，どのような発展が成し遂げられたか，それは『数理科学』さらに科学技術にどのような貢献を齎したか．それを，紙数のため，対象を「乱流の統計理論」に絞って述べてみたい．

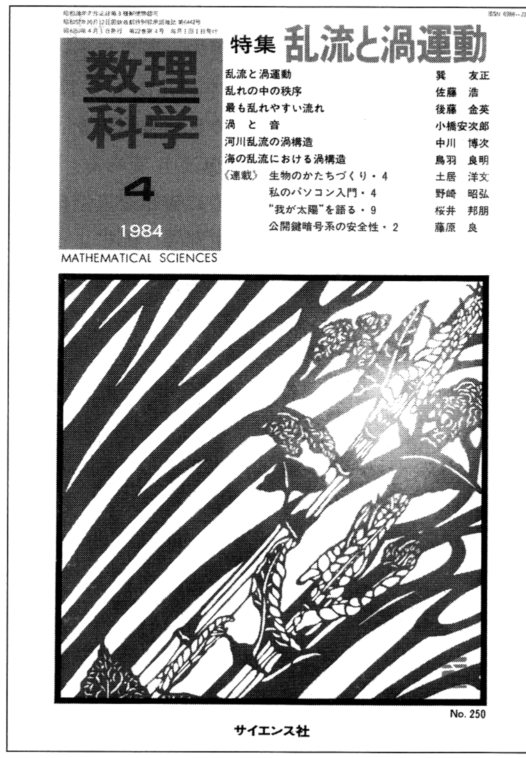
Reynoldsの実験以来，研究者の関心は一貫して，乱流の「平均速度，運動エネルギー，応力」といった各次の「多点速度相関」にあった．当初は，物理的な類推や近似を用いてこれらの量を評価したが，戦後の1950年代になって，研究の主流は「多点速度相関」の方程式を流体の基礎方程式から導く「統計理論」に向けられた．筆者が研究者の列に加わったのはこの頃である．

この演繹的な「乱流の統計理論」には，一つの難点があった．それは，各次の「多点速度相関」の方程式が，運動方程式の非線形性によって，常に高次の速度相関を伴なうため，有限の方程式系が完結しないことである．これを完結させるためには，高次の速度相関をより低次の相関と関係づける「完結仮説」が必要となる．これが，「乱流の統計理論」を理論物理学上の有数の難問の一つとする「乱流の完結問題」である．

20世紀の後半，研究者の関心はこの「完結問題」に向けられた．この問題は乱流の理論的専門書には必ず言及されているので，参照されたい．

この「完結問題」による理論の手詰まりに原理的な突破口を開いたのが，Lundgren[2]とMonin[3]によって導かれた，乱流の「多点速度分布」の方程式系を対象とする「乱流の統計力学」である．この理論では，「速度分布」の特性関数が「速度相関」の母関数となるので，先の「完結問題」は自動的に解消する．ただ，この「多点速度分布」の方程式系もまた非完結であるが，これは前述の「非完結性」とは違って処理可能で，現に筆者が導入した『交差独立性完結仮説』[4]によって完全に解決された．

この理論はまだ，一般の乱流に対して完結した「多点速度分布」の方程式系が得られた段階にあるが，それでも，間欠的（intermittent）な「局所エネルギー散逸率」を理論的に導いた点で，高Reynolds数乱流の完全な統計理論を与えるものと考えられる[6]．



引用文献

1) Reynolds, O., *Phil. Trans. Roy. Soc.* **174** (1883), 935–982.
2) Lundgren, T.S., *Phys. Fluids*, **10** (1967), 969–975.
3) Monin, A.S., *PMM J. App. Math. Mech.* **31** (1967), 1057–1068.
4) Tatsumi, T., Kambe, T. *et al.* ed. *Geometry and Statistics of Turbulence.* Kluer Acad. Publ. (2001) pp.3–12.
5) Tatsumi, T., *J. Fluid Mech.* **670** (2011), 365–403.
6) Tatsumi, T., *Theo. Appl. Mech. Japan*, **60** (2011), 3–19.

（たつみ・ともまさ，京都大学・京都工芸繊維大学 名誉教授）

リレー連載

数学的な感覚の探求 第15回

思考法の源を探る

数学を利用する感覚

徳山　豪

1. 数学を使う力

『天地明察』という小説が話題になって，映画にもなった．これは渋川春海（安井算哲）という江戸時代の天文学者かつ囲碁棋士の話であるが，春海は数学を駆使して貞享暦という新しい暦を作成した江戸時代最高の応用数学者である．小説だと春海は算聖といわれる関孝和を尊敬しており，友人のように書かれている．実際に関孝和の計算技法は天文や暦学に直結しているが，他の伝記などではライバル視されて書かれているものもあり，最高の数学者と最高の応用数学者の関係が実際どうだったのかはわからない．

さて，春海がどのように数学を使うかというと，膨大な天体観測データを数学的に処理して，いろいろな暦の数理モデルの評価をし，さらに中国の暦を日本の暦にするための補正をして新しいモデルを作っていく．これは現代の言葉で言うと，情報科学における数学の利用でもある．私の専門はこの情報科学，さらに詳しく言うとアルゴリズム理論を中心にした理論計算機科学である．この分野は数学に非常に近いのだが，いわゆる純粋数学（Classical Mathematics）とは趣が異なり，どちらかというと，数学の長い歴史の成果を，必要な数学的道具を作りながら利用する立場である．

モーツァルトやベートーベンを使って映画音楽を作っているようなものだが，Google などの情報産業にはこの手の数学者が多数活躍している．

1.1 大学の数学と実世界の数学

個人的な昔話から始めさせていただく．母校の東京大学では，入学時は専門が未定であり，私も漠然と理論化学や分子生物学のような分野に憧れを持っていた．線形代数などは高校時代から勉強していたが，「何で数字を長方形に配置した行列が大切なのかしらん」くらいに思っていた．

転機は，大学1年生での物理や化学の講義である．化学では分子の軌道エネルギーの計算をするのだが，これは実は数学でいうと固有値の計算で，教養の線形代数の教科書の最後のほうにある．物理ではハミルトニアンなるものが最初から出てきて，これが作用素という線形代数の延長に属するものだということを理解できていないと，いくら真面目に自習しても落ちこぼれる．そこで感じたのは，理系学問には数学が必須であるということ，その反面，数学を熟知していれば，混沌とした自然（あるいは講義）でもとても美しく整理して理解できるということである．「数学科に進学して，基礎をきっちり教わろう！」

しかし，数学科に進学すると，そこは違った世界であった．トップレベルの学生は，大学の2年

生ですでに数学のために命を懸け，自ら学ぶ人たちであり，その会話は難しい現代音楽のようである．例えば，学友たちが多様体（良い性質を持った物体）の「フチ」について議論しているが，横で聞いていて全く話が分からない．私は「多様体の縁（境界）」だと思っていたのだが，彼らは数論的な多様体での「付値」というものの話をしているのであった．

先生方はそれらの学生を一流の数学者にする目的で，数学の最先端の講義をするので，科学の基礎になる数学を教えてもらいたい学生には，何のために抽象的な道具や概念を勉強するのかわからない．強烈だったのは，その年に新設された情報科学科との共通の代数の講義で，先生*1)が一言，「情報の学生には難しかろうが，単位はあげるからあまり深刻にならなくていい」．

ということで，在学中は代数を研究し，数学の博士の学位をもらってから，IBM の東京基礎研究所に中途採用されて情報分野に変更することになった．進路担当の先生からは，学位を取ってからの会社就職は記憶にないと言われたが，当時からアメリカでは IBM や ATT 等の情報企業で多くの数学者が活躍していた．

入社した途端に驚いたことに，本務の研究以外にも，次から次へと数学の問題が持ちこまれてくる．コンピュータに直結する論理関数の問題や線形代数などはもちろん，自動製図（CAD）に必要なトポロジーの基礎，コンピュータの記憶装置の最適化，積分計算の加速法，グラフィクスでの図形分割の手法，数学教育システムでの公理のことなど．立場上 NO とは言えず，ともかく答えるのである．今はインターネットが発達しているので，こういう「玉手箱」のような数学者の使い方は需要が少なくなっているかもしれない．

1.2 小手調べパズル

要は世の中には数学を利用したい場面は非常に多いということである．特に国際的には数学を使う能力は高く評価され，マムフォードやスメールなどフィールズ賞の受賞者も，画像処理や最適化理論など「数学を使う」方向での優れた成果をあげている．ちなみに，今では年齢とともに頭が悪くなっているので，私のところに専門外の問題を持ち込むのは勘弁してほしい．

次節から数学の使い方を紹介するが，より「現金な」例として，商取引に関連した手軽な数学パズル（出典は文献 1)）を小手調べに出題しよう．

品物がブラインドビッド（目隠し商法）で売り出されている．原価が 0 ドルから 999 ドルまで 1 ドル刻みで異なる 1000 個の品があり，それらからランダムに一つ選ばれている．一回だけ値段をつけることができ，原価以上の値段をつけたら取引成立としよう．原価より安値だと買えない．

あなたは品物を活用または加工して，80%の付加価値を得ることができる．どうやって値段をつけるべきだろうか（解答は最後に示す）．原価が 100 ドルと 999 ドルの間だったらどうだろうか？

2. アルゴリズム設計での数学の利用

凸包（図 1）は，情報処理では基本的な概念である．ここでは，平面図形の点集合の凸包の計算アルゴリズム（つまりコンピュータに計算させるように手順を記述すること）を考えてみよう．まず，計算すべきものが何であるかをきちんと説明しないといけない．

教科書にある定義を使おう．平面上の図形 P の任意の 2 点 p, q に対して線分 pq が必ず P に入るとき，P は凸図形であるという．ある集合 S を含む最小の凸図形を S の凸包と呼び，$C(S)$ と書く．

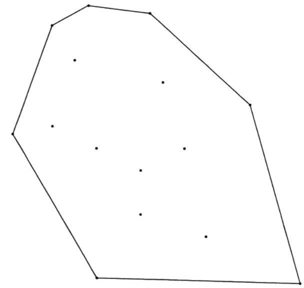


図 1　点集合の凸包．

*1) 私の師匠の岩堀長慶教授．ただし講義自体は面白く，また先生は経済学部に出向いて計画法の明快な講義をされたりしておられました．

凸包構築問題：S が平面上の点集合であるときに，$C(S)$ を計算するアルゴリズムを作れ．

ところが，この定義はコンピュータ向きにできていないので，アルゴリズム設計は容易ではない．平面図形内の 2 点の対 p, q は無限にあるので，コンピュータが凸性を定義通りに試すことは有限時間ではできない．また，凸図形は無数にあるので「最小の凸図形」であることの判定もコンピュータにはできない．さらに「最小の凸図形」が存在することは数学的にも自明ではない（証明してみてください）．したがって，言いかえが必要である．

観察 1：S の凸包 $C(S)$ は，S の部分集合を頂点集合に持つ凸多角形で，S の点をすべて内部に含むものである．

この言いかえは人間にはわかりやすく，視覚的に納得できる．しかし，アルゴリズムにしようとすると，S が n 個の点を持つときの部分集合の数 2^n は，$n = 60$ で 100 京を越え，$n = 70$ だとスパコンでも調べつくせない．そこで，もっと問題を噛み砕かないといけない．

観察 2-1：3 点の集合の凸包はその 3 点を頂点とする三角形である．
観察 2-2：凸多角形 P と外部の点 p があったとき，p から P へ二本の接線を凸包に添加して新しい多角形 $P \vee p$ ができる（図 2）．
観察 2-3：$C(S) \vee p$ は $S \cup \{p\}$ の凸包である．

これを用いると，次のようなアルゴリズムができる．点を x 座標の小さい順に番号付けて $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ とする．3 点 p_1, p_2, p_3 を頂点とする三角形を P とし，以下の添加操作を $i = 4$ から $i = n$ まで繰り返す．

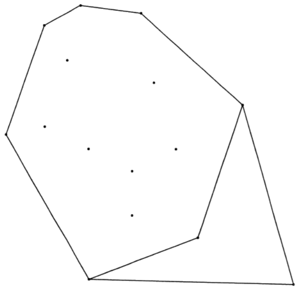


図 2　凸包への添加操作（右下の点の添加）．

添加操作：P を $P \vee p_i$ に取り換える．

最後にできた P が S の凸包になることは納得できると思う．このアルゴリズムは，接線の計算法などを上手にプログラムすれば高速に（専門的には $O(n \log n)$ 時間で）動く．

ここでは見てわかる性質を数学的に示しただけなのだが，凸包の定義からこのように噛み砕いて，凸包構築問題のアルゴリズムを作るには，数学の利用感覚が必要である．このアルゴリズム[2)]（少し動作は違う）を最初に発表したグラハムは，アメリカ数学会の会長を務めた著名な数学者であるが，企業（ATT ベル研究所）に長く在籍し，数学を実用に使うプロフェッショナルでもある．

2.1 ちょっとした一言からの連想

創造を行うには自分の頭で考えることが必要で，その裏返しとして，知識を詰め込む教育を行うことにはいろいろと反発がある．しかし，裏返しは必ずしも真ではない（数理論理的にも，あるいは現実生活でも）．2000 年以上の数学の天才たちの努力を自分の頭で再発見するのは当然困難である．一方で，数学的知識を活用すれば，プラスアルファしてどんどん新しい成果が創生されていく．

問題を少し高度にしよう．点集合の代わりに図形，例えば線分や三角形，多角形などの集合 S を考えて，これらの図形を平面上で移動させたものの凸包を考察してみよう．上手に移動させて凸包を小さくするにはどうすればいいだろうか？ つまり，与えられたすべての図形を格納できる最小の（凸である）容器を考えなさいということである．書類を重ねて風呂敷で包むようなことを考えてほしい．ここでは特に，図形はすべて線分で，平行移動しかできないとしよう．

線分格納問題：平面上に線分の集合 S があったときに，それぞれの線分を交差を許して平行移動させて，凸包が最小になるようにせよ．

図 3 での左にある線分集合を移動して右側のよ

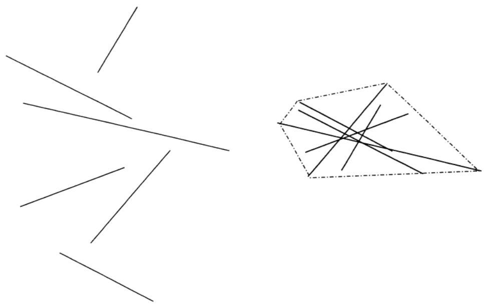


図 3　線分集合の格納問題.

うにすると凸包（点線）は小さくなるが，よく見るともっと小さくできそうである.

実は上記の問題は数学的に正しく記述されていない．なぜなら,「最小」というものが存在するためには, 必ず 2 つの候補が大小比較できなくてはいけないが, この場合, 移動の方法によっては, 互いに相手を含まないような凸包が作れるからである．このように数学的にきちんとしていない問題を持ち込まれることは，企業等での現場でも多く，数学的に正しい定式化を行うことが最初の仕事である．例えば, 下記のようにすると意味のある問題になる.

面積最小化線分格納問題：平面上の線分の集合 S があったときに，線分を（交差を許して）平行移動させて，凸包の面積が最小になるようにせよ.

さて，この問題を解くコンピュータアルゴリズムを考えてみよう．それぞれの線分の移動の可能性は無限にあるので，このままでは到底アルゴリズムにすることができない．少しずつ移動させて，面積を減少させていくプログラムを作ってみると，解が様々に変わる（つまり正確に解けない)．線分が 4 本または 5 本のときに，読者もどうやれば面積が最小になるか考えてみてほしい.

この問題は，幾何学データ処理に関する 2 カ国共同研究の一環で，韓国の浦項工科大学の安教授を訪問したときに相談されたものである．安先生は 2 つの多角形を平行移動させて凸包の面積を最小化する良いアルゴリズムを発表していたが, 3 つ以上の図形だとどうも上手くいかないので, 4 本の線分のときに学生に計算機実験で答えを探らせて

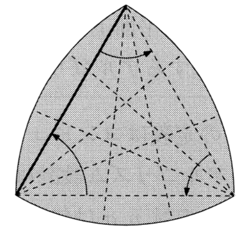


図 4　ルーローの三角形（面積は 0.7048 以下).

いるところであった．帰り際に私がこんなことを言った．「線分の集合が，すべての単位線分だったら，どうだろうね？」(こういう一言が大切であることが多い)．直径 1 の円板はすべての単位線分を含み，面積は $\pi/4 = 0.7853\ldots$ になるが，ちょっと考えてみるともっと面積の小さい図形（例えば図 4）にすべての単位線分を入れることができる.

帰国の飛行場で大切なことに気が付いた．面白いことに同じ時間に安先生は，教室会議ではたまたま隣に座った数学科の先生に，この単位線分の場合についてそっと聞いてみた．その先生も下記のことをご存じで，その場で教えてくださったということである．本稿を読んでいる読者にもお気づきの方はおられると思う.

掛谷宗一先生（当時東北大学，後に統計数理解析所初代所長）が 1917 年に考えられた「掛谷の問題」という有名な問題がある．これは,「長さ 1 の線分を内部で回転させるのに必要な最小面積の領域を求めよ」という問題である．厠で敵に襲われたときに，長槍を振り回すのに必要な部屋の最小面積を考えたのが発端だったという伝説もある．領域が凸である場合（厠は普通は凸である）の答えとして，藤原松三郎先生との論文中[3]で高さ 1 の正三角形であろう（面積は $1/\sqrt{3} = 0.57735\ldots$）と予想し*2)，パルという数学者が 1921 年に証明を与えている[4]．凸という条件がないほうが有名で，実は面積は 0 にできるということが知られていて，フラクタル図形などにも関連し，今でも数多くの波及研究が行われている.

線分集合が単位線分全体である場合の我々の問題は，実は掛谷問題の凸の場合そのものである．高さ 1 の正三角形の一辺の長さは $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.154\ldots$

*2)　この論文を読むと上記伝説は少し怪しい.

であり，単位線分を入れる最小面積の格納容器になるのは不思議である．さて，これを知れば，数学者の連想感覚を使うと自然に次に示す予想ができる．つまり，

拡張掛谷予想：任意の S に対して，面積最小化線分格納問題の解になる三角形がある．

ターゲットを三角形に絞ることができれば効率の良い $O(n \log n)$ 時間のアルゴリズムを設計することができる．計算機で実験すると予想は正しそうで，後は証明である．現代の情報検索を利用すると，上記のパルの論文から引用元を次々と辿ることによって，その後の 90 年間に出版された関連論文を探すことができる．かなり苦労した末，1966 年の論文[5)]に有効な道具があるのを発見し，予想の証明にこぎつけた[6)]．100 年間の数学者の努力を借りることによって問題解決ができたのである．

ちなみに，面積最小化図形格納問題は，一般の図形では未解決である．読者で知見をお持ちの方は，ご連絡くださるとうれしい．

2.2 知っていれば簡単

問題をちょっとだけ変えて，平面上の線分の集合 S の線分を平行移動させて，面積の代わりに凸包の周長を最小化してみよう．この周長最小化問題は，ある定理を知っているとあっけなく解ける．

まず一つだけ定義をしておく．連結な平面図形 P を，傾き θ の直線 $y \sin\theta = x \cos\theta$ に射影（直交射影）すると，直線上の区間になる．この区間の長さ $W_P(\theta)$ は，直感的には P の θ 方向の幅であり，θ の関数として P の幅関数と呼ぶ．注意として幅関数は物体を平行移動させても変わらない．下記がそのコーシー・クロフトンの定理である．

定理：凸図形 P の周長 $L(P)$ は，幅関数の $0 \leq \theta \leq \pi$ での積分値 $\int_0^\pi W_P(\theta)$ と一致する．

例えば P が直径 1 の円板なら，幅関数は常に 1 を値に持ち，積分値は π であり，長さ 1 の水平線分（横幅 1，高さ 0 の長方形）なら，幅関数は $|\cos\theta|$ で積分値は 2 となり，いずれも周長と一致する．

この定理を使うと，S の線分の中点を原点に合わせたときの凸包 Q が最小，すなわち S を格納する任意の凸領域 P に対して $L(Q) \leq L(P)$ を満たすことが下記のように説明できる．

- P が線分 s を格納するので $W_P(\theta) \geq W_s(\theta)$.
- $W_S(\theta) = \max_{s \in S} W_s(\theta)$ とすると，$W_P(\theta) \geq W_S(\theta)$.
- 一方，$W_Q(\theta) = W_S(\theta)$ である（確認必要）.
- 定理より，$L(P) \geq \int_0^\pi W_S(\theta) = L(Q)$.

これなどは本当に「知るや知らざるや」の問題である．白状すると私はこの定理をこの形では知らず，共同研究者に教えてもらった．

3. 数学者を活用する

さて，私の昔話で述べたように，身近に数学者がいていろいろ教えてくれると便利である．しかし，数学者は孤高というイメージが伝記等で喧伝され，また最先端の研究に没頭するのを邪魔すると迷惑がられそうである．こういう先入観だと数学者に相談を持ちかけにくい．

実際は数学でも仲間との議論で刺激しあい，情報交換を行いながら研究を進める必要がある．歴史的にもヒルベルト学派，ブルバキなどは有名であるが，もっと自由な交流スタイルに進化させたのが，「数学者はコーヒーを定理にする機械である」という名言を持つ放浪の数学者エルデシュや先に述べたグラハムらである．研究への貢献度を争わなくていいように，論文の著者順はアルファベット順にするというルールを作り，リラックスした雰囲気で気軽に共同研究を行う風土を作ったのである[*3)]．

特に私の専門の理論計算機科学では，これはとてもありがたいスタイルである．優れた研究を行うためには，数学的に深いだけでなく，情報科学としての価値や将来的な応用のインパクトを考えないといけないので，学問的視野の広い人，議論をリードして方向性を作る人，問題を見つけるのがうまい人，問題の価値を判断する人，解法のア

*3)　エルデシュ先生が 76 歳のとき昼食で隣席になったが，次々と問題を問いかけてくるのに驚いた．このときの問題は解ければエルデシュ数（共著関係を用いた彼との距離）が 1 になる．

イデアを出す人，粘り強く計算や証明に取り組む人，論理を整理して問題を拡張していく人など，多くの才能が集まってディスカッションできる研究者が平等の立場で協力することが必要なのである．国内外でこのようなディスカッションのための合宿は盛んで，例えばドイツのダグスチュールには，専用の施設（昔の領主の住居で，ダグスチュール城と呼ばれる）がある．安価でおいしいビールやワインがふんだんにある環境で，このようなチームが1週間ほど泊り込んで議論をし，持ち帰ってあとはインターネットなどで共同研究を続けて完成するのである．

3.1 輪を広げる

さて，数学者を活用する話に戻ると，数学者の仲間内の共同研究と異なり，分野外の人との間の交流はそれほどシステム化されていない．ニュートンやアインシュタインを見れば明らかなように，数学の発展には物理や化学をはじめ，他分野からの影響が大きく関与するのは歴史が示しているが，分野を広げれば広げるほど，専門分野の「言語」の違いからコミュニケーションが難しくなり，意識的かつ組織的に相互理解を促進する努力を行わないと交流はなかなか始まらない．

手前味噌になるが，東北大学で平成19年に開設した応用数学連携フォーラム*4) では，理工学にとどまらず，情報，生命，経済などを含む幅広い研究者が集まり，各分野での数学的な課題を持ち寄ってワークショップやフォーラムを開催している．またこれを起爆剤として「数学をコアとするスマートイノベーション融合研究共通基盤の構築と展開」という東北大学の重点プロジェクトで，共同研究の推進や数学を活用できる人材の育成を行っている．さらに，応用の中でも特に，物質科学への数学の利用に関しては，CREST プロジェクトが平成20年から実施され，研究拠点として大きく発展している．このようなディスカッションの輪をさらに広げることが，数理科学のためにも，あるいは科学技術全般にとっても非常に重要であると私たちは考えている．

*4) http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~amf

4. 終わりに

お約束したクイズの答えを示そう．あなたが x ドルと値段をつけたとしよう．すると，x ドルより原価の高い品は売ってくれないので，買える品の原価は 0 ドルから x ドルの間である．期待値（平均値）は $x/2$ ドルなので，80%の付加価値をつけても $0.9x$ ドルであり，期待値として1割損をする．したがって，「手を出さない」のが正解である．

もし原価が 100 ドルから 999 ドルの間なら，同様に考えると 500 ドルという最適値が出てくる．こういうコツをつかむのが大切で，金融派生商品などの設計[7]などでも利用できるのである．

最後になるが，シャプレイとロスが2012年度のノーベル経済学賞を受賞した．これはゲールとシャプレイが1962年にアメリカ数学会月報[8]で発表した「安定マッチング」のアルゴリズムを，80年代以降にRothらが体系化し，精力的に実社会に活用していった成果である．数学の活用は広く人間の生活全般に影響し，その威力は大きい．

参考文献

1) P. Winkler. *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection.* AK Peters Ltd., 2004
2) R. Graham. An Efficient Algorithm for Determining the Convex Hull of a Finite Planar Set. *Inf. Process. Lett.* **1(4)**: 132–133, 1972.
3) M. Fujiwara, S. Kakeya. On some Problems of Maxima and Minima for the Curve of Constant Breadth and the In-revolable Curve of the Equilateral Triangle. *Tohoku Math. J.* **11**, 92–110, 1917.
4) J. Pál, Ein Minimumproblem für Ovale. *Math. Ann.*, **83**:311–319, 1921.
5) G.D. Chakerian. Sets of Constant Width. *Pacific J. of Math.*, **19**:13–21, 1966.
6) H.-K. Ahn, S.-W. Bae, O. Cheong, J. Gudmundson, T. Tokuyama, A. Vigneron. A Generalization of the Convex Kakeya Problem. *Algorithmica*, online first doi: 10.1007/s00453-013-9831-y, 2013.
7) A. Shioura, T. Tokuyama. Efficiently Pricing European-Asian Options - Ultimate Implementation and Analysis of the AMO Algorithm. *Inf. Process. Lett.* **100(6)**: 213–219, 2006.
8) D. Gale, L. Shapley, College Admissions and the Stability of Marriage. *American Mathematical Monthly*, **69**: 9–15, 1962.

（とくやま・たけし，東北大学大学院情報科学研究科）

情報幾何の新展開
脳と情報の数理科学

第29回

多層パーセプトロン (1)

その生い立ちから自然勾配学習法まで

甘 利 俊 一

多層パーセプトロンは1950年代末，脳の仕組みがまだよくわかっていなかった時代に，脳をモデルとした学習機械として提案され，一世を風靡した．しかし，その後のコンピュータの躍進と，それに支えられた人工知能やパターン認識技術の発展によって，情報工学の分野では振り向かれなくなったかに見えた．ところが1980年代に入って，認知科学が並列分散処理を標榜して脳のモデルと接近し，バックプロパゲーション（逆誤差伝搬）学習が提案されると，パーセプトロンが万能学習機械のモデルであることから再び勢いを回復し，今は工学における学習の標準的な手法の一つとして定着している．さらに，パーセプトロンは特異構造を持つモデルであることが分かり，その解析を通じて統計学の分野にも新しい発展をもたらした．さらに昨今のディープラーニングの成功で完全復活を成し遂げた．パーセプトロンの栄枯盛衰を眺めてみよう．

統計学のモデルと見た場合，パーセプトロンは特異構造を含んでいる．これまで統計学は，特異構造を含まない「性質の良い」モデルを主に扱ってきた．そこではCramer–Rao定理を中心とするきれいな体系が整えられてきた．情報幾何もこの枠組みから生まれたといえる．しかし，特異構造は幾何学にとって避けて通れない大きなテーマである．今回，次回の2回にわたって，パーセプトロンの数奇な運命をたどりながら，情報幾何の連載の最後としたい．

29.1 学習機械：多層パーセプトロン

パーセプトロンは，1950年代に脳をモデルとした学習機械としてRosenblatt[1)]が提案した．単純パーセプトロンから始めよう．もっとも簡単な1個の人工ニューロンを考える（図29.1）．これは，入力情報 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ を受け取り，答えとして0か1の信号 y を出す．計算の仕方は，各入力 $x_i, i=1,\cdots,n,$

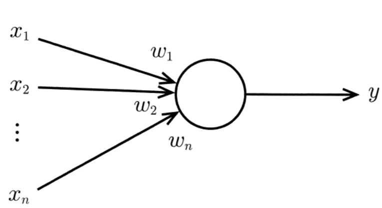


図 29.1　人工ニューロン．

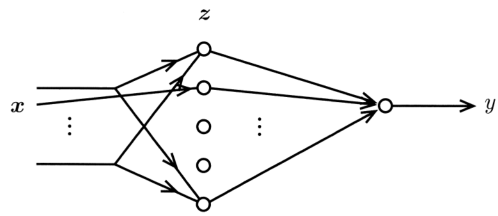


図 29.2　単純パーセプトロン．

に重み w_i を掛けて重み付きの和を取り，これが閾値 h より大きいか小さいかで 1 か 0 を出力すると言う簡単なものである．式で書けば，$1(u)$ を u が正なら 1，負なら 0 の Heaviside 関数として，$\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_n)$ のときに

$$y=1\left(\sum w_i x_i-h\right)=1\,(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}-h) \tag{29.1}$$

となる．各入力信号 x_i も 0 か 1 の値を取れば，これは論理関数とみなせる．

この素子でパターンの識別を行う．いま，多数のパターン $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N$ があり，C_1 と C_0 の 2 群に分けられているとする．C_0 に属するパターンを入力したときに $y=0$ を，C_1 に属するパターンを入力したときに $y=1$ を出力するとき，このニューロンは正しい識別をすると考える．もちろん，正しい識別ができるためには，$\boldsymbol{x}$ の空間に超平面 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}-h$ があって，C_0 のパターンに対しては $f(\boldsymbol{x})<0$, C_1 のパターンに対しては $f(\boldsymbol{x})>0$ となっていなければいけない．このとき 2 群のパターンは線形分離可能と言い，これを満たす重み $\boldsymbol{w}$ と閾値 h をうまく見つければ，正しい識別ができる．

話を見やすくするため，もう一つ新しい変数 x_0 を導入するが，実はこれは定数で，$x_0=1$ である．対応する重みを $w_0=-h$ と置けば，重み付き和から閾値を引いたものが

$$\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}=\sum w_i x_i-h \tag{29.2}$$

のように簡単な内積表示で済む．パーセプトロンの素晴らしさは，2 群のパターンが線形分離可能ならば，学習によって正しい $\boldsymbol{w}$（$w_1,\cdots,w_n$ と h）を自動的に見つけ出せるというところにある．

パーセプトロンの収束定理

C_0, C_1 の 2 群のパターンが線形分離可能ならば，有限回の学習によって，正しい答を出す機械が得られる．その学習法は，入力 $\boldsymbol{x}$ に対して正解を出すならば $\boldsymbol{w}$ を変えず，誤りを出力するならば，c を正の定数として，$\boldsymbol{w}$ を

$$\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{w}\pm c\boldsymbol{x} \tag{29.3}$$

のように変えればよい．ただし，C_1 のパターンを誤ったときは $+$, C_0 のパターンを誤ったときは $-$ の符号を取るものとする．

この収束定理は，当時として驚くべきもので，証明されるまでに何年もかかっている．皆さんには良い演習問題であろう[2)]．n 入力の論理関数は全部で 2^{2^n}

個ある．単純パーセプトロンは特別な論理関数で，その個数は $2^{n^2/2}$ 程度である．だから，極めて限られた論理関数しかこれで実現できず，その能力は限られていて，識別するパターン群が線形分離でなければ駄目である．しかし，学習能力があることが強みとなる．そこで，不備を補うため入力の前処理を行う．前処理によって，パターン $\boldsymbol{x}$ を別の次元，例えば次元の高いベクトル $\boldsymbol{z}$ に変換する．$\boldsymbol{z}$ の空間で見たときに C_0 と C_1 とが線形分離可能であれば，この $\boldsymbol{z}$ を単純パーセプトロンに入力して学習すればうまくいく．どうすれば，線形分離可能になるだろうか．Rosenblatt[1)] の驚くべきアイデアは，この変換機をランダムな重みを持つニューロンで作ることであった．十分多数のニューロンを前段階として配置し（図 29.2），入力 $\boldsymbol{x}$ に対する重みを各ニューロンでランダムに決める．ニューロンの数が十分大きければ，どんなパターンの集合 C_0, C_1 でも，線形分離可能な $\boldsymbol{z}$ パターンに変換できる．

このとき，パーセプトロンは図 29.2 のように，層状の機械となる．入力層，パターンを変換する中間層（隠れ層ともいう），そして答えを出す出力層からなる．出力層は多数のニューロンからなっていてもよい．また，中間層は，何層にも多重になっていてもよい．Rosenblatt はこれにフィードバックをかけたものも考えている[1)]．彼が海難事故で没したのは誠に残念な出来事であった．

Rosenblatt の考えは，良く見ると SVM（サポートベクトル機械）そのものである．ただし今の SVM は，次元を上げる変換にニューロンを使うのではなくて，カーネルを用いて議論を進め，$\boldsymbol{z}$ を直接に扱うことをしない．これで，高次元の呪縛から逃れる．

アナログパーセプトロン

中間層のニューロンにも学習能力を持たせれば，次元をそれほど上げなくても，都合のよい変換機ができると思われる．しかし，その学習法が思いつかない．これが多層パーセプトロンの泣き所であった．パーセプトロンは，2 値変数を使う論理機械である．この考えを改め，入出力はアナログ変数でもよいとして見よう．すると，1 個のニューロンの動作は

$$y = \varphi(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}) \tag{29.4}$$

のように書ける．ここで，$\varphi(u)$ はシグモイド型の関数で，$\varphi(-\infty) = 0, \varphi(\infty) = 1$ で，単調連続で微分可能な関数とする．良く用いられるのは

$$\varphi(u) = \frac{1}{1 + \exp(-u)} \tag{29.5}$$

であるが，これ以外でもよい．

m 個の中間素子を持つ多層パーセプトロンの入出力関係を

$$y = \sum v_j \varphi\left(\boldsymbol{w}_j \cdot \boldsymbol{x}\right) \tag{29.6}$$

と書こう．ここで，$\boldsymbol{w}_i$ は，入力 $\boldsymbol{x}$ から第 j 番目の中間層のニューロンへの重みベクトル（閾値もここに入れてある），$z_j = \varphi\left(\boldsymbol{w}_j \cdot \boldsymbol{x}\right)$ が第 j 番目の中間層の素子の出力，v_j はこれが出力ニューロンへ入るときの重みである．さらに，

出力ニューロンは線形としている．シグモイド関数を使って非線形にしてよいのだが，それは出力 y を単に非線形にスケール変換するだけであるから，ここでは線形ニューロンを使う．また，出力ニューロンは 1 個のみ，多層と言っても中間層は 1 層しかない．ただ，一般化は容易である．

多層パーセプトロンで，中間層を含めてうまい学習法が考案できないだろうか．離散の論理関数の場合はこれは難問であった．しかしアナログニューロンの場合は簡単である．いま，入力信号 $\boldsymbol{x}$ に対する真の解（教師信号として与えられる）を $y(\boldsymbol{x})$ としよう．このとき，パーセプトロンの現在のパラメータをまとめてベクトル $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_m;v_1,\cdots,v_m)$ とすれば，出力は

$$y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\sum v_j\varphi\left(\boldsymbol{w}_j\cdot\boldsymbol{x}\right) \tag{29.7}$$

と書ける．パーセプトロンの動作を評価するのに，教師信号と自分の出力の差の 2 乗である 2 乗誤差

$$l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{2}\left|y(\boldsymbol{x})-y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\right|^2 \tag{29.8}$$

を用いてみよう（実はもっと一般の誤差関数を使ってよい）．すると，学習法として，時間 t でのパラメータ $\boldsymbol{\xi}_t$ を，次の時間 $t+1$ では

$$\boldsymbol{\xi}_{t+1}=\boldsymbol{\xi}_t-\eta\frac{\partial l\left(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{\xi}_t\right)}{\partial\boldsymbol{\xi}} \tag{29.9}$$

に変える勾配法が考えられる．学習係数 η は小さな定数でもよいし，η_t にして時間と共に変化してもよい．さらに，この定数を学習によって決めていくこともできるだろう．この理論は IEEE の雑誌に掲載されたが[3)]，査読者の一人は，‘too mathematical’ の一語で，掲載不可というコメントを寄こした．これが，当時の工学の世界であった．

その後パーセプトロン熱は冷める．理由として，Minsky と Papert の著書[2)]が挙げられる．彼らは並列学習機械のモデルとして多層パーセプトロンを取り上げた．ただし，2 値の論理機械である．入力として画面上に描いた幾何学的な図形を用い，その概念判別がどのくらい可能かを議論した．例えば，図形が連結か否かを判別する機械である．この他，凸図形であるか否かというものもあるし，図形の Betti 数の計算もあった．彼らは多くの例で，計算量の意味で計算がうまくいかないことを示した．すなわち，中間層に必要な素子の数が指数的に増大すること，重みの大きさが指数的に増大すること，などである．世の中では，これを持ってパーセプトロンの欠陥が明らかになり，顧みられなくなったという．こうして，神経学習の理論研究は闇の時期に入ったというのであるが，これは欧米の独りよがりであろう．日本やロシアでは学習機械の研究が着々と進行していた[4)]．

欧米で闇を切り裂いたのは，コネクショニズムである．それまで，人工知能と認知科学が手を結び，記号を主体とする論理計算によって知能の仕組みが解明できるとしてきたものが，突如として，並列分散の情報処理こそが認知と知能の基礎にあると，方針を転換したのである．その中でも目玉として出てきた

のが多層パーセプトロンの学習である．Rumelhart らがこれをひっさげて華々しく活躍した[5]．彼らのアイデアは，入出力をアナログにすること，これにより損失関数として微分可能な (29.8) を用い，この勾配を計算してパラメータの学習を行うことである．これは私の論文[3]と全く同じ考えであるが，私の論文は早すぎたのであろうか，欧米の神経回路網研究の暗黒期に飲まれて顧みられず，わずかにロシアでは評判になったという[4]．

コネクショニズムの勃興で神経回路モデルのルネッサンスが始まり，多層アナログパーセプトロンの学習法が，確率降下法として再発見される[5]．後に，同種のものは Werbos[6] が出していて，またこれに近いアイデアは Le Cun も提出したとされたが，私の論文にまで遡ることはなかった．Rumelhart らのアイデアの秀逸だった点は，多層構造の機械で，関数 (29.8) のパラメータによる微分を実行すると，関数の繰り返し構造の微分により，微係数が多層構造の各素子について，出力から順に遡って計算できることである．これは，パラメータを修正するための誤差信号が回路を遡って伝搬していくように見える．それで，これを誤差逆伝搬法（error-back-propagation）と名付け，人々を魅了した．多くのシミュレーションが行われ，1980 年代後半のニューロブームの主役を演じた．

しかし，問題点も明らかになってきた．万能学習機械である点は良い．だが，誤差関数の期待値 $L(\boldsymbol{\xi}) = E\left[l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})\right]$ は，パラメータ $\boldsymbol{\xi}$ の多峰関数であり，極小解がたくさんあってどこに落ち込むか保証できない．この難点を解決するために生まれたアイデアの一つが SVM である．これは初期の単純パーセプトロンと同じで中間層の素子を固定するが，その代わりに多数の素子，多くの場合無限個の素子を使う．そのための計算にカーネルトリックを用いて困難を切り抜ける．これには極小解がなくて大変に有効であり，現在も標準的な方法の一つとされる．極小解が多数ある難点を克服するために考え出されたもう一つのアイデアが，弱小学習機械を多数集めて融合する，ブースティングである．

パーセプトロンの他の困難は，学習の収束が遅いことである．コンピュータが早くなったとはいえ，当時はまだ遅かった．したがって，コンピュータを用いて学習を実行すると，初めのうちは誤差が順調に減ってくる．そのうち減りが少なくなる．学習の回数 t を横軸に，期待誤差 $L\left(\boldsymbol{\xi}_t\right)$ を縦軸に書いた学習曲線を見ると，あるところで誤差がほとんど減らなくなるプラトーが現れる（図 29.3）．

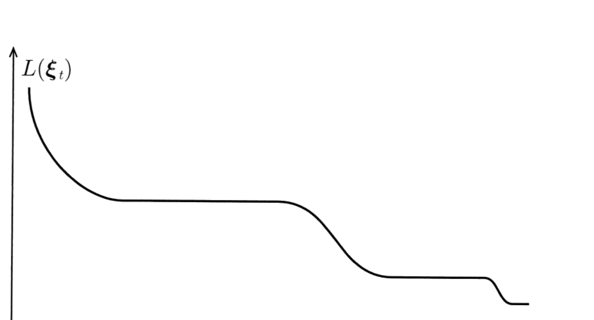


図 29.3　学習曲線とプラトー．

ここで収束したと思ってあきらめてはいけない．粘り強く学習を一晩続けると，何と誤差が減り始める．これが何回か続く．この原因は，中間素子の対称性（素子の番号の付け替えに関する不変性）に起因し，対称性の破壊に時間がかかることが分かった．ここに特異構造が現れる．

29.2 パーセプトロンの空間と特異点

多層パーセプトロンを統計モデルと見よう．これには，出力にガウス誤差を加え，

$$y = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) + n \tag{29.10}$$

とする．n はガウス雑音である．この機械は入力信号を出力信号に確率的に変換する確率機械と見ることができる．その時の入出力信号の確率は

$$p(y|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = c \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{y - \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})\right\}^2\right] \tag{29.11}$$

のように書ける．ここで，σ^2 はガウス誤差の分散で，上式はパラメータ $\boldsymbol{\xi}$ に指定された，入力 $\boldsymbol{x}$ を条件とする y の条件付き確率である．入力列 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ と対応する教師信号列 $y_1, \cdots, y_N$ が例題として与えられたときに，学習は，このデータを用いてパラメータ $\boldsymbol{\xi}$ を逐次的に推定する問題と見て良い．確率分布の全体は，$\boldsymbol{\xi}$ を座標系とする双対接続の空間をなす．だから幾何学の出番である．しかし，今の場合雑音項をガウス分布にしたため，空間の 3 次テンソル T_{ijk} が 0 になり，自己双対になって単なるリーマン空間である．多層パーセプトロンのなす多様体をニューロ多様体と呼ぼう．

ニューロ多様体に，パラメータ $\boldsymbol{\xi}$ を座標系として取れば，これが大域的な座標系になり，何の問題も生じないように見える．パラメータ空間の 1 点 $\boldsymbol{\xi}$ は，入出力関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ を表す．2 つの異なるパラメータ $\boldsymbol{\xi}_1$ と $\boldsymbol{\xi}_2$ が，

$$f\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_1\right) = f\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_2\right) \tag{29.12}$$

となって同じ入出力関数を表していると問題である．ニューロ多様体に同値関係 $\approx$ を導入し，(29.12) 式が成立する場合に $\boldsymbol{\xi}_1 \approx \boldsymbol{\xi}_2$ とする．この同値関係で同値なものは同じとみなし，商空間 $\tilde{M} = M/\approx$ を構成する．一般の入出力関係 $y = f(\boldsymbol{x})$ を表す関数 $f(\boldsymbol{x})$ 全体の空間

$$F = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \middle| E\left[\{f(\boldsymbol{x})\}^2\right] < \infty \right\} \tag{29.13}$$

を考え，パーセプトロンが実現する関数 (29.7) の全体，すなわちニューロ多様体を商空間 $\tilde{M}$ と見よう．ニューロ多様体 $\tilde{M}$ は特異点を含み，厳密な数学の意味ではこれらの点を除かない限り多様体にはならない．特異点では，接空間を線形空間として構成できない．

簡単な例題を使ってこれを見よう．一番単純な，1 入力 1 中間層素子のパーセプトロンは，入出力関数として

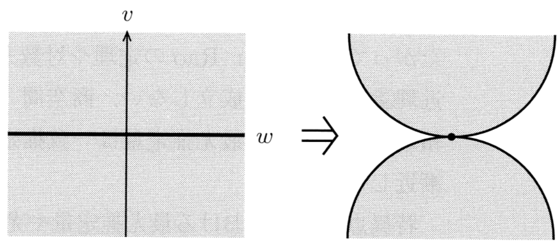


図 29.4　2 次元 (w,v) 平面で w 軸を 1 点に縮める．

$$y = f(x,w,v) = v\varphi(wx) \tag{29.14}$$

を持つ．パラメータ $\boldsymbol{\xi}$ は 2 次元で $\boldsymbol{\xi} = (w,v)$．だから，パラメータの空間 M は通常の 2 次元平面である．しかし，その動作つまり入出力関数で考えると，$v=0$ となる横軸上の点では，w が何であっても $f(x,w,0)=0$ で，関数は皆等しい．だから，$(0,w)$ と言う形の点がすべて同値でこれが 1 点に縮められる．同値類で割った商空間は，横軸を 1 点に縮めたもので，図 29.4 のようになるだろう．ニューロ多様体 $\tilde{M}$ は，2 次元平面をこの同値類で割ったもので，2 つの 2 次元平面を 1 点で結んだものになる．これが特異点である．

話を少し広げて，中間層の素子を 2 個含むモデル

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = v_1\varphi(\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{x}) + v_2\varphi(\boldsymbol{w}_2\cdot\boldsymbol{x}) \tag{29.15}$$

を考えよう．ここでは，中間層の 2 つの重みベクトル $\boldsymbol{w}_1$ および $\boldsymbol{w}_2$，さらに出力ニューロン受ける重み v_1, v_2 がパラメータであり，$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, v_1, v_2)$．ここで 2 種類の同値類が現れる．一番目は前と同じで，どちらかの v_i が 0 のときである．$v_i = 0$ ならこの項は消えるから，$\boldsymbol{w}_i$ なんであっても動作は同じである．これは前に述べた 1 中間層素子のときと同じ仕掛けで，中間層素子が一つ不要になる縮退である．もう一つは $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2$ のときである．このとき，2 つの素子は同一の出力を出すから，最後の答えは $v_1 + v_2$ の値に依存して決まり，$v_1 + v_2 = c$ であれば，v_1 と v_2 の間での c の値の配分はどうでもよい．つまり，$v_1 + v_2 = c$ を満たす線上での $\boldsymbol{\xi}$ は，同値になる．これらを一つの式で表せば，パラメータが一意的に決まらない関数を表す特異領域は

$$R = \{\boldsymbol{\xi} \mid v_1 v_2 \,|\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2| = 0|\} \tag{29.16}$$

となる．上式を満たす $\boldsymbol{\xi}$ の集合 R がパラメータ空間で考えた特異領域をなす．

29.3 特異モデルとモデル選択（AIC と MDL）

特異領域 R では，パラメータ $\boldsymbol{\xi}$ を変化させても関数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ または条件付き確率 $p(y|\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ の値が変わらない方向がある．パーセプトロンのパラメータ空間 M での Fisher 情報量は

$$g_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = E\left[\frac{\partial \log p(y|\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}\frac{\partial \log p(y|\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}\right] \tag{29.17}$$

であるから，特異領域 R 上では $g_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ が正定値行列にならず，縮退する．したがって，Cramer–Rao の定理や対数尤度比についての定理など，統計学の漸近理論がここでは成立しない．商空間 $\tilde{M}$ では特異点が現れる．真の値が特異領域にあるとき，最尤推定量は一致推定量にはなるが，それはガウス分布には漸近しない．

特異点の近傍における最尤推定量や尤度比統計量の振舞いは次回に述べるが，今回は特異点の及ぼす影響として AIC, BIC, MDL などのモデル選択基準を考え，さらにその学習への影響を見よう．

多層パーセプトロンで，中間層の素子を m 個と想定して，入出力データ $(\boldsymbol{x}_1, y_1), \cdots, (\boldsymbol{x}_N, y_N)$ から学習によってパラメータ $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ を求める．ここで m をいくつに定めたら良いかという問題が生ずる．m の小さいモデルは m の大きいモデルに含まれるから，m の大きいものを取っておけば良さそうであるが，大きすぎるモデルを用いると過適合（オーバーフィッティング）が起こり，かえって良くない．$\hat{\boldsymbol{\xi}}$ は与えられた学習データにはうまく合って，これらのデータに対する誤差（訓練誤差）は小さくなるものの，新しいデータ $(\boldsymbol{x}, y)$ の振舞いを予測したときの誤差（汎化誤差）はかえって増えてしまう．そこで，データをもとに，汎化誤差が最小になるように m を決めたい．これがモデル選択である．赤池の提案した AIC（赤池情報量規準）[7]，Bayes 推論の BIC（Bayes 情報量規準），Rissanen の最小記述長の MDL など，いろいろな基準が提案され，いろいろな場合にシミュレーションが行われたが，どれが良いか決着がつかなかった．

これにはモデルの特異性が関係している．パーセプトロンや混合分布などの統計モデルは階層的な構造を持つ特異モデルであり，従来の統計的手法が使えない．それなのに，AIC, BIC, MDL は最尤推定量が Fisher 情報行列の逆行列を分散行列とするガウス分布に漸近するという想定で導かれた．これは成立しないため，特異モデルの場合に新しい計算と補正が必要になる．そのためには次回に述べる特異モデルでの推定量の振舞いが必要になる．ここでは，AIC の場合を簡単に触れよう．

モデル選択では，いくつかの統計モデルの中で，観測されたデータから真の確率分布に近い分布を推定値として出すモデルを求めたい．そこで，モデル M を用いた最尤推定 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_M$ が与える分布 $p\left(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_M\right)$ が，KL ダイバージェンスで計って真の分布 $q(\boldsymbol{x})$ にどのくらい近いか，

$$KL\left[q(\boldsymbol{x}) : p\left(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_M\right)\right] = -H\left[q(\boldsymbol{x})\right] - \int q(\boldsymbol{x}) \log p\left(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_M\right) d\boldsymbol{x} \qquad (29.18)$$

で評価する．2 つのモデル M と M' を比較するのに，右辺第 1 項の $H[q]$ は同じであるから，第 2 項を比べることになる．ただし，$\hat{\boldsymbol{\xi}}_M$ はデータ D に依存する確率変数である．そこで (29.18) の右辺の第 2 項

$$l_{\text{gen}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_M\right) = -E\left[\log p\left(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_M\right)\right] \qquad (29.19)$$

を仮に汎化誤差と呼ぶ．ここで，E は，新しいデータ $\boldsymbol{x}$ について真の分布 $q(\boldsymbol{x})$

を用いた期待値である．しかし，真の分布は分からないから，これを経験分布

$$\hat{q}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\sum \delta\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i\right) \tag{29.20}$$

で置き換えて，計算できる量（経験誤差）

$$l_{\mathrm{train}}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}_M\right) = -E_{\hat{q}}\left[\log p\left(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_M\right)\right] = -\frac{1}{N}\sum\left[\log p\left(\boldsymbol{x}_i, \hat{\boldsymbol{\xi}}_M\right)\right] \tag{29.21}$$

で代用するが，両者の違いを評価し，補正をする必要がある[7]．

モデル M が正則であれば，よく知られた計算によって

$$l_{\mathrm{gen}} = l_{\mathrm{train}} + \left(\hat{\boldsymbol{\xi}}_M - \boldsymbol{\xi}_0\right) G \left(\hat{\boldsymbol{\xi}}_M - \boldsymbol{\xi}_0\right) \tag{29.22}$$

が導出できる．ただし，ここでは $\boldsymbol{\xi}_0$ を真の値とした．この右辺第 2 項の補正項は，データ D に依存する確率変数であるが，その期待値は，p をパラメータ $\boldsymbol{\xi}$ の次元として，p/N に収束する．したがって AIC として，l_{gen} を求めるのに l_{train} を補正した

$$\mathrm{AIC} = 2Nl_{\mathrm{train}} + 2p \tag{29.23}$$

が得られた[7]．2 つの階層的なモデルがある場合，AIC の小さいほうを選ぶのがこの基準である．しかし，モデル M が特異であればこの議論が使えない[8]．$\hat{\boldsymbol{\xi}}_M$ はガウス分布に従わず，G^{-1} は発散する．

Rissanen は，観測データを記述するのにモデルを用い，データを一番よく縮約するモデルを求めた．もちろん，真の分布がわかっていれば，この確率を用いてデータを縮約するのが良い．しかしこれができないとなると，最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ を用いて，その分布によりデータ D を符号化して圧縮する．このとき，符号化に使った最尤推定量を一定の精度で保持する必要がある．全体の記述長を最小にする最小記述長

$$\mathrm{MDL} = 2Ne_{\mathrm{train}} - p\log N \tag{29.24}$$

という基準を提案した[9]．これは，漸近的にはベイズ推定で提案されていた BIC と同じものである．AIC と MDL は，サイズ（パラメータ数 p）の大きなモデルにかける罰金項の係数をパラメータ当たり $2/N$ にするか $\log N/N$ と言うことである AIC のほうが N が大きくなるにつれて小さい罰金項を用いている．このため，もしパラメータの数をこれで推定するとすれば，実際よりは少し多めに出る場合がある．これに対して，MDL は N を大きくしていけば，正しいパラメータ数が得られるようになるので，MDL のほうが一致性があってよい，という議論がある．しかし，推定した確率分布で見れば，AIC も一致性があるし，こちらのほうは汎化誤差を基準にしているので，誤差が小さいという判断もできる．

AIC と MDL どちらが良いか，いろいろなモデルでシミュレーションを繰り返したが，結果は様々で結論が出なかった．良く調べてみると，どちらもその導出には，正則な確率分布を用いている．しかし，多くの階層モデル，例えば

多層パーセプトロンは特異構造を持っている．したがって，推定量に漸近的なガウス分布を想定し，Fisher 情報行列を用いた AIC や MDL の評価はここでは使えない[8]．多層パーセプトロンで特異性を考慮して AIC を計算すれば，それは $\log N/N$ に比例する罰金項を用いることになる．

29.4 自然勾配学習法

特異領域は，学習の振舞に大きく影響する．学習が遅くなるプラトーは，実は特異領域のせいである．自然勾配学習法はこの難点を克服する．自然勾配学習法について概観しよう．

私の 1967 年の論文[3]は，多層パーセプトロンの学習法を提案しただけでなく，その動作の解析や多くの一般化を含んでいる．学習の定数 η について，η が定数のときは，学習は最適点の周りに分布し，変動する．このときの学習によりパラメータ $\boldsymbol{\xi}_t$ が真の値に近づく平均速度と，最終の分布の誤差の広がり（分散）$e_t = E\left[|\boldsymbol{\xi}_0 - \boldsymbol{\xi}_t|^2\right]$ とのトレードオフの関係も陽に示したが，これは後に Heskes らによって再発見された．一方，学習定数を適応的に変えていく考え，すなわち，現在のパラメータが最適点から遠いときは η を大きくし，近いときは小さくするという適応的に変える考えも提出したが，これはアイデアだけでうまくいかなかった．その後 Barakai[10]らが離散の場合に良いアイデアを出し，私は自然勾配学習法の論文で学習法の学習に関わる一般的なアルゴリズムとして提案した．

学習係数 η のところに正定値の行列 K を入れても，学習はうまく進む．ここに Fisher 情報行列の逆行列 G^{-1} を用いるのが自然勾配学習法である．独立成分分析で，行列の空間 $Gl(n)$ 上での勾配を考えると，これはリーマン空間であるからリーマン空間上の勾配が出てくる．これを人に説明するのに，これがリーマン空間では自然な勾配であると説明したことから自然勾配（natural gradient）という名がついて，流布してしまった．パーセプトロンのパラメータ空間はリーマン計量 (29.17) を持つ．しかしパラメータ空間は特異領域を含み，そこでは $G = (g_{ij})$ が縮退して G^{-1} が定義できない．自然勾配学習法は損失関数の勾配 ∇l の代わりにリーマン勾配 $G^{-1}\nabla l$ を用いるもので，パーセプトロンの学習は，

$$\boldsymbol{\xi}_{t+1} = \boldsymbol{\xi}_t - \eta G^{-1}\left(\boldsymbol{\xi}_t\right)\nabla l\left(\boldsymbol{x}_t, y, \boldsymbol{\xi}_t\right) \tag{29.25}$$

のようになる．特異領域では G^{-1} は発散するが，$G^{-1}\nabla l$ は存在し，計算できる．

多層パーセプトロンの場合，入力 $\boldsymbol{x}$ の分布もわかっていない状況で計量 $G = (g_{ij})$ を計算することは難しい．さらにその逆行列の計算には手間がかかる．そこで，逆行列 G^{-1} を一挙にデータから適応的に求める手法が考えられる．これを適応的自然勾配学習法と言う．これは，G^{-1} の推定値を適応的に

$$\hat{G}_{t+1} = (1+\varepsilon_t)\hat{G}_t - \varepsilon_t \hat{G}_t^{-1}\nabla f\left(\boldsymbol{x}_{t'}\boldsymbol{\xi}_t\right)\nabla f\left(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{\xi}_t\right)'\hat{G}_t^{-1} \tag{29.26}$$

と変えていく方法である．このとき，学習係 η と ε の選び方が重要である．さらに，特異領域では G が縮退して G^{-1} が発散するから，学習の初期段階ではこの発散を防ぐ注意が必要になる．

自然勾配学習法そのものは，多層パーセプトロンなどの Fisher 情報行列を計量とする統計モデルにあっては，実質的に Gauss–Newton 法と同等であることが指摘されている．ただし，G^{-1} を適応的に求めると，自然勾配法の計算が簡単に実行できるようになっている．適応的自然勾配法でいくつかの例題を解くと，驚くほど収束が早く，通常のバックプロパゲーション学習法で現れたプラトーが消えていることが分かる[11)]．

多層パーセプトロンでは，Fisher 情報計量が縮退し，そこでは線素の長さが 0 になる特異領域があった．これが学習の遅滞の原因であった．自然勾配をとれば，縮退の長さをも考えに入れた勾配であるから，特異領域があっても学習は最急勾配に沿って進む．すなわち商空間での自然な勾配をたどっていることになる．もちろん特異点がこれで解消するわけではないが，障害はなくなる．

終わりの一言

今回は，長い歴史を持ち数奇な運命をたどり，しかも機械学習に大きな影響を与え続けた，多層パーセプトロンを概観した．学習の舞台であるパラメータ空間は，特異領域を含むリーマン空間であり，同値のものをまとめた商空間は特異点を含む．この幾何学的な構造がパーセプトロンの動作に大きく影響する．

参考文献

1) F. Rosenblatt, *Principles of Neurodynamics*, Spartan, 1961.
2) M. Minsky and S. Papert, *Perceptron – An Essay in Computational Geometry*, MIT Press, 1969.
3) S. Amari, A Theory of Adaptive Pattern Classifiers, *IEEE Trans.*, **EC-16**, No.3, 299–307, 1967.
4) Y.Z. Tsypkin, *Foundations of the Theory of Learning Systems*, Academic Press (English translation from Russian), 1973.
5) D.E. Rumelhart, G.E. Hinton and R.J. Williams, Learning representations by back-propagating errors, *Nature* **323** (6088): 533–536, 1986.
6) P.J. Werbos, Beyond Regression, New Tools for Prediction and Analysis in the Behavioral Sciences, PhD thesis, Harvard University, 1974.
7) H. Akaike, A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. AC*, **19**, 716–723, 1974.
8) 甘利俊一，「赤池情報量規準 AIC—その思想と新展開」，室田一雄，土屋隆編『赤池情報量規準 AIC—モデリング・予測・知識発見』，共立出版，52–78, 2007.
9) J. Rissanen, *Stochastic Complexity in Statistical Inquiry*, World Scientific, 1989.
10) N. Barkai, H.S. Seung, and H. Sompolinsky, On-line learning of dichotomies, *Adv. Neural Info. Proc. Syst.*, **7**, 303–310, 1995.
11) S. Amari, H. Park and T. Ozeki, Singularities Affect Dynamics of Learning in Neuromanifolds, *Neural Computation*, **18**, 1007–1065, 2006.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

ラプラス変換

常微分方程式・差分方程式への応用

海老原 円・太田 雅人

13.1 はじめに

今回はラプラス変換に関する問題を取り上げる．ラプラス変換は工学部では代表的な応用数学として重要視されているが，理学部で講義されることは意外に少ないようである．少なくとも，著者らが勤務する大学の数学科にはラプラス変換の講義はない．また，第 2 著者がはじめてラプラス変換を勉強したのは，数学系の大学院の博士課程を修了し，ある大学の工学部に職を得たときであった．内定をもらってから，指定された教科書を慌てて勉強し，1 カ月後には，あたかも以前からよく知っていたような顔をして，ラプラス変換の講義をしたことを覚えている．昔話はこれくらいにして，問題に取りかかろう．

13.2 基本的な性質と常微分方程式への応用

次の問題は，ラプラス変換の定義から始まり，簡単な具体例と基本的な性質を調べた後，常微分方程式の初期値問題の解法への応用まで扱っている．

問題 13.1 （東京大学大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻，平成 20 年度）
関数 $f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ を $F(s)$ と書き，その定義は

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \qquad (1)$$

である．ただし，e は自然対数の底であり，$F(s)$ の存在は保証されているものとする．

(問 1)　以下に示す関数 $f(t)$ のラプラス変換を式 (1) に基づいて導出せよ．

(a)　$f(t)=t$　　　(b)　$f(t)=\sin kt$

(問 2)　以下の関係式が正しいことを示せ．ただし，a は定数であり，$f'(t)=\dfrac{df(t)}{dt}$ である．

(a)　$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$　　　(b)　$\mathcal{L}\{f'(t)\}=sF(s)-f(+0)$

(問 3)　ラプラス変換に関する畳み込み定理

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t-z)f_2(z)\,dz\right\}=F_1(s)F_2(s) \tag{2}$$

を証明せよ．ただし，式 (2) の左辺に $x=t-z,\ y=z$ の変数変換を用い，以下の関係式

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-sx}f_1(x)\,dx\int_0^{a-x} e^{-sy}f_2(y)\,dy=F_1(s)F_2(s)$$

を用いてよい．

(問 4)　前問までの結果を利用し，常微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+a\frac{dx(t)}{dt}+bx(t)=f(t) \tag{3}$$

を以下の手続きに従って解く．ただし，$a,\ b$ は定数であり，$f(t)$ は既知の関数とする．また，初期条件は $x(0)=0,\ x'(0)=0$ とする．以下の (a)–(c) に答えよ．

(a)　式 (3) の両辺をラプラス変換せよ．ただし，$\mathcal{L}\{x(t)\}=X(s),\ \mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ とする．

(b)　(a) の結果を $X(s)$ について解け．

(c)　(問 3) の畳み込み定理を利用して，$x(t)$ を $f(t)$ で表せ．

解答例　(問 1)　(a) 複素数 s の実部 $\mathrm{Re}\,s>0$ とする．このとき，$a>0$ に対して，部分積分により

$$\int_0^a te^{-st}\,dt=\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^a+\frac{1}{s}\int_0^a e^{-st}\,dt=-\frac{a}{s}e^{-as}-\frac{1}{s^2}(e^{-as}-1)$$

となる．ここで，$a\to\infty$ とすると，$|e^{-as}|=e^{-a\mathrm{Re}\,s}\to 0,\ ae^{-as}\to 0$ だから

$$\mathcal{L}\{t\}=\lim_{a\to\infty}\int_0^a te^{-st}\,dt=\frac{1}{s^2}.$$

(b) 問題文には明記されていないが，以下では，簡単のため，k は 0 でない実数とする．このとき，$\mathrm{Re}\,s>0,\ a>0$ に対して，部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{-st}\sin kt\,dt&=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin kt\right]_0^a+\frac{k}{s}\int_0^a e^{-st}\cos kt\,dt\\&=-\frac{1}{s}e^{-as}\sin ka+\frac{k}{s}\left\{\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos kt\right]_0^a-\frac{k}{s}\int_0^a e^{-st}\sin kt\,dt\right\}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-as}\sin ka - \frac{k}{s^2}(e^{-as}\cos ka - 1) - \frac{k^2}{s^2}\int_0^a e^{-st}\sin kt\,dt$$

となる．ここで，$a \to \infty$ とすると

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin kt\,dt = \frac{k}{s^2} - \frac{k^2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin kt\,dt$$

となり

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin kt\,dt = \frac{k}{s^2+k^2}.$$

（別解）　まず，オイラーの公式より，$\sin kt = \frac{1}{2i}(e^{ikt} - e^{-ikt})$ に注意する．複素数 c に対して，$\mathrm{Re}\,s > \mathrm{Re}\,c$ とすると，$a > 0$ に対して

$$\int_0^a e^{-st}e^{ct}\,dt = \int_0^a e^{-(s-c)t}\,dt = \left[\frac{-1}{s-c}e^{-(s-c)t}\right]_0^a = \frac{1}{s-c}\left(1 - e^{-(s-c)a}\right).$$

ここで，$a \to \infty$ とすると，$|e^{-(s-c)a}| = e^{-(\mathrm{Re}\,s-\mathrm{Re}\,c)a} \to 0$ だから，

$$\mathcal{L}\{e^{ct}\} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}e^{ct}\,dt = \frac{1}{s-c} \tag{13.1}$$

となる．これから，c として $\pm ik$ をとれば，$\mathrm{Re}\,s > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin kt\} &= \int_0^\infty e^{-st}\sin kt\,dt = \frac{1}{2i}\left(\int_0^\infty e^{-st}e^{ikt}\,dt - \int_0^\infty e^{-st}e^{-ikt}\,dt\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ik} - \frac{1}{s+ik}\right) = \frac{k}{s^2+k^2}\end{aligned}$$

を得る．

(問 2)　(a) ラプラス変換の定義に従って計算すると

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a)$$

となる．

(b) $a > 0$ に対して，部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{-st}f'(t)\,dt &= \left[e^{-st}f(t)\right]_0^a + s\int_0^a e^{-st}f(t)\,dt\\ &= e^{-as}f(a) - f(+0) + s\int_0^a e^{-st}f(t)\,dt\end{aligned}$$

となる．ここで，広義積分

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}f(t)\,dt$$

が存在するような s について考えているので，$a \to \infty$ のとき $e^{-as}f(a) \to 0$ としてよい（正確ではないが，ここでは，細部には触れないことにする）．よって，

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}f'(t)\,dt = sF(s) - f(+0)$$

が成り立つ．

(問 3)　この問の答案としては，問題文中のヒントに従ってそのまま書けばよいであろう．

なお，累次積分の順序交換により

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t-z)f_2(z)\,dz\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f_1(t-z)f_2(z)\,dz\right)dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_z^\infty e^{-s(t-z)}f_1(t-z)\,dt\right)e^{-sz}f_2(z)\,dz \\ &= \int_0^\infty e^{-sx}f_1(x)\,dx\int_0^\infty e^{-sz}f_2(z)\,dz = F_1(s)F_2(s)\end{aligned}$$

となるが，一見形式的なこの計算は，**ルベーグ積分論**における**フビニの定理**により正当化される．

(問 4)　(a) 問 2 (b) を 2 回用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x''(t)\} &= s\mathcal{L}\{x'(t)\} - x'(0) = s\left(s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0)\right) - x'(0) \\ &= s^2X(s) - x(0)s - x'(0)\end{aligned}$$

となる．よって，式 (3) の左辺をラプラス変換すると

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\{x''(t) + ax'(t) + bx(t)\} \\ &= s^2X(s) - x(0)s - x'(0) + a\left(sX(s) - x(0)\right) + bX(s) \\ &= (s^2 + as + b)X(s) - x(0)(s+a) - x'(0)\end{aligned}$$

となる．ここで，$x(0) = x'(0) = 0$ だから，求める式は

$$(s^2 + as + b)X(s) = F(s)$$

となる．

(b) (a) より，$X(s) = \dfrac{F(s)}{s^2 + as + b}$ である．

(c) 2 次方程式 $s^2 + as + b = 0$ の 2 根を α, β とする．$\alpha \neq \beta$ のときは

$$\frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{(s-\alpha)(s-\beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta}\right)$$

だから，(13.1) と畳み込み定理より

$$\begin{aligned}\frac{F(s)}{s^2 + as + b} &= \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{F(s)}{s-\alpha} - \frac{F(s)}{s-\beta}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{\alpha(t-z)}f(z)\,dz\right\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{\beta(t-z)}f(z)\,dz\right\}\right) \\ &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{e^{\alpha(t-z)} - e^{\beta(t-z)}}{\alpha - \beta}f(z)\,dz\right\}\end{aligned}$$

となる．よって

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{e^{\alpha(t-z)} - e^{\beta(t-z)}}{\alpha - \beta}f(z)\,dz\right\}$$

となるが，**ラプラス変換の一意性**より

$$x(t) = \int_0^t \frac{e^{\alpha(t-z)} - e^{\beta(t-z)}}{\alpha - \beta} f(z)\,dz$$

となる．

次に，$\alpha = \beta$ の場合を考える．問 1 (a) と問 2 (a) の結果より

$$\mathcal{L}\{te^{\alpha t}\} = \frac{1}{(s-\alpha)^2}$$

である．よって，畳み込み定理より

$$\frac{F(s)}{s^2+as+b} = \frac{F(s)}{(s-\alpha)^2} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-z)e^{\alpha(t-z)} f(z)\,dz\right\}$$

となり，ラプラス変換の一意性より

$$x(t) = \int_0^t (t-z)e^{\alpha(t-z)} f(z)\,dz$$

となる．

解答終わり

定数係数線形の常微分方程式は，ラプラス変換により代数方程式に変換される．その代数方程式の解を**ラプラス逆変換**をすれば，元の常微分方程式の解が得られる．問題 13.1 では，非斉次項（外力項）が一般の場合を考えたが，次に，非斉次項が具体的に与えられた常微分方程式の解を具体的に求める問題を考えよう．

問題 13.2 （東北大学大学院工学研究科機械系 4 専攻，平成 25 年度） 関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する．

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt.$$

n を正の整数，a を正の定数とするとき，以下の問いに答えよ．なお，$f(t)$ の n 階微分を $f^{(n)}(t)$ と表すものとする．

(1) 以下の関係式が成立することを示せ．

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

(2) 問 (1) の関係式を用いて，$\cos at$ および $\sinh at$ のラプラス変換をそれぞれ求めよ．

(3) ラプラス変換を用いて，以下の微分方程式を解け．

$$f^{(3)}(t) + f^{(1)}(t) = 2e^{-2t}$$
$$f(0) = -1, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0$$

解答例 (1) n に関する帰納法で示す．

$n = 1$ の場合は，すでに問題 13.1 の問 2 (b) で示した．

次に，$n = 1, \cdots, k$ に対して関係式が成り立つとすると

$$\mathcal{L}[f^{(k+1)}(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f^{(k)}(t)\right] = s\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] - f^{(k)}(0)$$

$$
\begin{aligned}
&= s\left\{s^kF(s) - s^{k-1}f(0) - \cdots - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)\right\} - f^{(k)}(0)\\
&= s^{k+1}F(s) - s^kf(0) - s^{k-1}f^{(1)}(0) - \cdots - sf^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0)
\end{aligned}
$$

となり，$n = k+1$ に対しても成り立つことが分かる．よって，すべての n に対して関係式が成り立つことが示された．

(2) $f(t) = \cos at$, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ とおくと，$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ だから，問 (1) の関係式より，

$$
\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - s
$$

となる．一方，$f''(t) = -a^2f(t)$ より，$\mathcal{L}[f''(t)] = -a^2\mathcal{L}[f(t)] = -a^2F(s)$ だから，

$$
\mathcal{L}[\cos at] = F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}.
$$

同様に，$g(t) = \sinh at$, $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ とおくと，$g(0) = 0$, $g'(0) = a$ だから，問 (1) の関係式より，

$$
\mathcal{L}[g''(t)] = s^2G(s) - sg(0) - g'(0) = s^2G(s) - a
$$

となる．一方，$g''(t) = a^2g(t)$ より，$\mathcal{L}[g''(t)] = a^2\mathcal{L}[g(t)] = a^2G(s)$ だから，

$$
\mathcal{L}[\sinh at] = G(s) = \frac{a}{s^2-a^2}.
$$

(3) $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ とおくと，問 (1) の関係式と初期条件より

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}[f^{(3)}(t)] = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) = s^3F(s) + s^2 - s,\\
&\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) = sF(s) + 1
\end{aligned}
$$

となる．一方，(13.1) より，$\mathcal{L}[2e^{-2t}] = \dfrac{2}{s+2}$ だから，与えられた常微分方程式をラプラス変換すると

$$
(s^3+s)F(s) = \frac{2}{s+2} - s^2 + s - 1 = -\frac{s(s^2+s-1)}{s+2}
$$

となる．これから，$F(s) = -\dfrac{s^2+s-1}{(s+2)(s^2+1)}$ であるが，右辺の有理関数を**部分分数分解**すると

$$
-\frac{s^2+s-1}{(s+2)(s^2+1)} = -\frac{1}{5(s+2)} - \frac{4s}{5(s^2+1)} + \frac{3}{5(s^2+1)} \tag{13.2}
$$

となる．最後に，これをラプラス逆変換すれば

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= -\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] - \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]\\
&= -\frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{4}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t
\end{aligned}
$$

と求める解が得られる．　**解答終わり**

上の解答例では，部分分数分解 (13.2) において，

$$-\frac{s^2+s-1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{a}{s+2} + \frac{bs+c}{s^2+1} \tag{13.3}$$

の係数 a, b, c を求める計算を省略したが，これは次のようにすれば比較的簡単に計算することができる．まず，a を求めるには，(13.3) の両辺に $s+2$ を掛けると

$$a = -\frac{s^2+s-1}{s^2+1} - (s+2)\frac{bs+c}{s^2+1}$$

となり，ここに，$s=-2$ を代入すれば，$a = -\left.\dfrac{s^2+s-1}{s^2+1}\right|_{s=-2} = -\dfrac{1}{5}$ となる．

同様に，(13.3) の両辺に s^2+1 を掛けて $s=i$ を代入すれば

$$bi + c = -\left.\frac{s^2+s-1}{s+2}\right|_{s=i} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

となり，$b = -\dfrac{4}{5}, c = \dfrac{3}{5}$ が求まる．

13.3 差分方程式への応用

最後に，ラプラス変換のもう 1 つの代表的な応用例として，差分方程式の解法に関する問題を取り上げる．

問題 13.3 （大阪大学大学院工学研究科電気電子情報工学専攻，平成 22 年度）

(a) 関数 $f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ とすると，

$$\mathcal{L}[f(t+a)](s) = e^{as}\left\{F(s) - \int_0^a e^{-st}f(t)\,dt\right\} \quad (a>0)$$

となることを示せ．ここで，s は複素数であり，ラプラス変換が定義できる範囲の値をとるものとする．

(b) 上の関係を利用して，式 (1) の差分方程式のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ．

$$f(t+2) + 2f(t+1) - 3f(t) = t \quad (t \geq 0), \tag{1}$$
$$f(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 2).$$

(c) 式 (1) の差分方程式の $f(t)$ を求めよ．

必要ならば，$\dfrac{1}{e^s-\alpha} = e^{-s}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-ns}$（$\alpha$ は実数）の関係を用いてもよい．

解答例 (a) ラプラス変換の定義に従って計算すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t+a)](s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t+a)\,dt = e^{as}\int_0^\infty e^{-s(t+a)}f(t+a)\,dt \\ &= e^{as}\int_a^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau = e^{as}\left\{F(s) - \int_0^a e^{-st}f(t)\,dt\right\}\end{aligned}$$

となる．

(b) 式 (1) の両辺をラプラス変換すると，(a) の関係式と問題 13.1 (問 1) (a) から

$$e^{2s}\left\{F(s)-\int_0^2 e^{-st}f(t)\,dt\right\}+2e^s\left\{F(s)-\int_0^1 e^{-st}f(t)\,dt\right\}-3F(s)$$
$$=\mathcal{L}[t]=\frac{1}{s^2}$$

となる．ここで，条件 $f(t)=0\ (0\le t\le 2)$ より，

$$F(s)=\frac{1}{s^2(e^{2s}+2e^s-3)}=\frac{1}{s^2(e^s+3)(e^s-1)}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{s^2(e^s-1)}-\frac{1}{s^2(e^s+3)}\right\}$$

となる．

(c) 上で求めた $F(s)$ をラプラス逆変換すると

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(e^s-1)}\right]-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(e^s+3)}\right]$$

となる．ここで，実数 α に対して，$|\alpha e^{-s}|<1$ のとき，等比級数の公式より

$$\frac{1}{e^s-\alpha}=\frac{e^{-s}}{1-\alpha e^{-s}}=e^{-s}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-ns}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}e^{-ns}$$

が成り立つので

$$f(t)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ns}}{s^2}\right]-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-ns}}{s^2}\right] \tag{13.4}$$

となる．また，$u(t)$ をヘヴィサイド関数（単位階段関数）

$$u(t)=\begin{cases}1 & (t\ge 0),\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

とするとき，関数 $g(t)$ のラプラス変換 $G(s)$ に対して

$$\mathcal{L}[g(t-a)u(t-a)](s)=e^{-as}G(s)\quad (a>0) \tag{13.5}$$

が成り立つ．実際，

$$\mathcal{L}[g(t-a)u(t-a)](s)=\int_0^{\infty}e^{-st}g(t-a)u(t-a)\,dt$$
$$=e^{-as}\int_a^{\infty}e^{-s(t-a)}g(t-a)\,dt=e^{-as}\int_0^{\infty}e^{-s\tau}g(\tau)\,d\tau=e^{-as}G(s).$$

よって，(13.4), (13.5) と $\mathcal{L}[t]=\dfrac{1}{s^2}$ より，差分方程式の解 $f(t)$ が

$$f(t)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-(-3)^{n-1}\right\}(t-n)u(t-n)$$

と求まる．

解答終わり

今回はここまでにしよう．次回は，フーリエ級数とフーリエ変換に関する問題を取り扱う．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

特　集（2014 年 5 月号予告）

数理科学における代数的構造

多彩な代数学的アプローチを探る

特　集（2014 年 3 月号）

幾何学における様々な発想

いかにして空間をとらえるか

編集後記

先日以前読んだことのある本を題材にしたバレエを観に行きました．なるほど，目で見るとストーリーはわかりやすいものだな，と感じました．

ところで今回の特集を読むと一つの物事に対して様々なアプローチがあることがわかります．ある物事に対して，そのアプローチがわかりづらい場合，自分には合っているかもしれない別なアプローチをとるのがよいのかもしれません．（R）

＊　　＊

今回の特集では様々な物理理論が複数の方法でアプローチできるということに着目し，解説していただきました．

佐々先生の解説では教科書の個性を題材に，熱力学の理解への様々なアプローチ方法について書かれています．教科書の個性を見比べることでいろいろな考え方を学べ，多面的に理論を眺められるということは大変興味深く，本を出版する立場としても勉強になりました．（T）

数　理　科　学　4月号

2014 年 4 月 1 日発行

数　理　科　学　編　集　部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

発行人　木　下　敏　孝

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 サ イ エ ン ス 社　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁